Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Função inversa e função implícita

Exercício 1 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

a) Mostre que f é localmente invertível, *i.e., que dado um ponto qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existe uma vizinhança $V \ni x_0$ na qual f é invertível.*

b) Será f globalmente invertível? Justifique.

c) Calcule $Df^{-1}(1, 0)$.

Resolução:

a) Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o Jacobiano de f nunca se anula:

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

b) Não, porque não é injectiva: $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$.

c) Pelo Teorema da Função Inversa, e notando que $(1, 0) = f(0, 0)$,

$$Df^{-1}(1, 0) = [Df(0, 0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2 *Seja $f :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

a) Mostre que f é localmente invertível.

b) Será f globalmente invertível? Justifique.

c) Sendo $(x, y) = f(r, \theta)$, calcule $Df^{-1}(x, y)$.

Resolução:

a) Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o Jacobiano de f nunca se anula no domínio de f:

$$Jf(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

b) Sim: se $(x,y) = f(r,\theta)$ então $r = \sqrt{x^2+y^2}$ é a distância de (x,y) à origem e $\theta \in \,]0, 2\pi[$ é o ângulo entre (x,y) e o eixo dos xx, ambos definidos de forma unívoca.

c) Pelo Teorema da Função Inversa,

$$Df^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

onde $(r,\theta) = f^{-1}(x,y)$.

Exercício 3 *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$f(x,y,z) = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2).$$

a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para f.

b) Será f globalmente invertível? Justifique.

c) Calcule $Df^{-1}(2,2,2)$, onde f^{-1} é a inversa local de f numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$.

Resolução:

a) Uma vez que

$$Jf(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 16xyz,$$

vemos que o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local na vizinhança de todos os pontos fora dos planos coordenados.

b) Não, porque f não é injectiva: por exemplo, $f(-x,y,z) = f(x,y,z)$.

c) Pelo Teorema da Função Inversa, e notando que $f(1,1,1) = (2,2,2)$, temos

$$Df^{-1}(2,2,2) = [Df(1,1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4 *Considere a função* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2.$$

a) *Quais os pontos da curva de nível* $F^{-1}(0)$ *em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma* $y = f(x)$*?*

b) *Esboce o conjunto de nível* $F^{-1}(0)$*. O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?*

c) *Seja* f *a função cujo gráfico descreve* $F^{-1}(0)$ *numa vizinhança do ponto* $(3,6)$*. Calcule* $f'(3)$*.*

Resolução:

a) Tratam-se dos pontos da curva de nível para os quais

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Os pontos da curva de nível para os quais $y = 0$ devem satisfazer

$$x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1;$$

logo, os pontos pedidos são os pontos $(-1,0)$ e $(0,0)$.

b) Trata-se de uma curva em forma de α, sendo o ponto mais à esquerda o ponto $(-1,0)$ e o ponto duplo o ponto $(0,0)$. Em nenhuma vizinhança de nenhum destes pontos é possível representar a curva como o gráfico de uma função $y = f(x)$, já que cada valor de x corresponderia a dois valores de y.

c) Tem-se

$$F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - [f(x)]^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 2f(x)f'(x) = 0.$$

Como $f(3) = 6$, tem-se

$$27 + 6 - 12f'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(3) = \frac{11}{4}.$$

Exercício 5 *Considere a função* $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$F(x,y,z,w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3).$$

a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(1,-1,1,1)$ *na qual o conjunto de nível* $F^{-1}(0,0)$ *é dado por* $x = f(y,w), z = g(y,w)$.

b) Calcule as derivadas parciais de f *e* g *no ponto* $(-1,1)$.

Resolução:

a) Basta ver que

$$\frac{\partial F}{\partial(x,z)} = \begin{bmatrix} -2z & -2x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{bmatrix}$$

e que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

b) Temos

$$F(f(y,w), y, g(y,w), w) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial(y,w)} + \frac{\partial F}{\partial(x,z)} \cdot \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,w)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2y & 2w \\ 3y^2 & 3w^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z & -2x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_y f & \partial_w f \\ \partial_y g & \partial_w g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No ponto $(1,-1,1,1)$ esta igualdade fica

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_y f & \partial_w f \\ \partial_y g & \partial_w g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_y f & \partial_w f \\ \partial_y g & \partial_w g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \partial_y f & \partial_w f \\ \partial_y g & \partial_w g \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \partial_y f & \partial_w f \\ \partial_y g & \partial_w g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$