Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Limites e continuidade

Exercício 1 *Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

Resolução:

a) Note-se que

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|x| \leq |x|$$

e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

b) Seja $g(x,y) = \dfrac{x^3}{x^4+y^2}$. Assim, por um lado temos

$$g(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0, \quad \forall y \neq 0,$$

e, por outro

$$g(x,0) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Então não existe o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}$.

c) Dado que $x^2+y^2 \geq x^2$ e que $x^2+y^2 \geq y^2$, teremos

$$\left|\frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}\,2y^2 \leq |x| + 2y^2$$

e, portanto, o limite existe e o seu valor é 0.

d) Seja $h(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

Note-se que

$$h(0,y) = 0 \quad ; \quad h(x,mx) = \frac{m^4x^2}{(1+m^4x^2)^3},$$

ou seja, os limites direccionais são todos nulos. No entanto, temos

$$h(y^2,y) = \frac{1}{2^{12}}$$

e, portanto, o limite não existe.

A existência e igualdade dos limites direccionais não garante a existência de limite. Ao longo da parábola de equação $x = y^2$ obtemos um limite não nulo.

Exercício 2 *Considere a função $f(x,y) = x\log(xy)$.*

1. *Indique, justificando, em que pontos é que a função f é contínua.*
2. *Mostre que, sendo S uma recta que passa pela origem e contida no domínio D de f o limite de f na origem relativo ao conjunto S,*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y),$$

existe e com o mesmo valor para toda as rectas nas condições indicadas.

3. *Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. (Sugestão: estude o limite relativo ao subconjunto de D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$).*

Resolução:

1. A função f é contínua no seu domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, pois a função $g(x,y) = \log xy$ é contínua neste domínio por ser a composta de funções contínuas ($g = \psi \circ \varphi$ onde $\psi(u) = \log u$ e $\varphi(x,y) = xy$) e portanto $f(x,y) = xg(x,y)$ é contínua pois é o produto de funções contínuas.

2. Consideremos as rectas que passam pela origem com declive m e que estão contidas no domínio D de f, ou seja, pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = mx$, com $m > 0$. O limite de f relativo a estas rectas é dado por

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x\log(x^2m) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2m)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2xm}{x^2m}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-2x) = 0.\end{aligned}$$

3. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=e^{-\frac{1}{x^2}}}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} x\log(xe^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to 0} x\log x + \lim_{x\to 0} x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x} + \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Logo este limite não existe e portanto o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ também não existe.

Exercício 3 *Estude a continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

Resolução: Usando as propriedades das funções contínuas é claro que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Resta analisar a continuidade de f na origem. Para isso, consideremos o eixo das abcissas, ou seja, o conjunto de pontos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Neste conjunto temos

$$f(x,0) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|},$$

ou seja,

$$f(x,0) = \begin{cases}1, & \text{se } x > 0\\ -1, & \text{se } x < 0,\end{cases}$$

e, sendo $f(0,0) = 0$, concluímos que a função f não é contínua na origem.

Exercício 4 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *definida pela expressão*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \sin(x^2+y^2).$$

Mostre que f *é prolongável por continuidade a* $(0,0)$ *e, sendo* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *o seu prolongamento, determine* $F(0,0)$.

Resolução: Notamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1,$$

logo para mostrar que f é prolongável por continuidade à origem, basta mostrar que o seguinte limite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Dado que $x^2 \le x^2 + y^2$ temos

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y|,$$

portanto o limite existe e é igual a 0. Concluimos que o prolongamento de f é dado por

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 5 *Estude a continuidade da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida pela expressão*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resolução: Usando as propriedades das funções contínuas é claro que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Note-se que

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen} xy}{xy} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e, sabendo que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy} = 1,$$
basta estudar a existência do limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Sendo
$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}\,|y| \leq |y|,$$
concluimos que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
e, portanto,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$