Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 2

(Diferenciabilidade)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$

   b) $g(x,y) = \dfrac{y}{x}$

2. Calcule, se existirem, as derivadas parciais na origem das funções:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $g(x,y) = \max\{x^2, y\}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = (xy, \log(xy))$

   b) $g(x,y,z) = (\sqrt{xy}, e^{yz})$

   c) $h(x,y,z) = (y^2, xz - y, z + xy)$

   d) $\phi(x,y,z) = y^2 - xyz + 2z$

   e) $\gamma(t) = (t^3, e^{-t}, \dfrac{1}{t})$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto P e segundo o vector v indicados:

   a) $f(x,y) = y^x\,;\ P = (2,1)\,;\ v = (1,1)$

   b) $g(x,y,z) = e^z + xy\,;\ P = (1,1,1)\,;\ v = (1,-1,1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função $f(x,y) = x(y^2 + xy)$, no ponto $(1,2)$ é nula.

6. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ é diferenciável na origem e calcule a respectiva derivada.

7. Considere as funções:

   i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   ii) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   iii) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

8. Considere a função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,1)$.

   b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $(2,1)$.

c) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(2,3)$.

9. Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

   (i) Para todo o $v \in \mathbb{R}^2$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$;

   (ii) f é descontínua em $(0,0)$.

10. Considere a função: $f(x,y) = \begin{cases} |x|\,, & \text{se } y = x^2 \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

    a) Analise f quanto à continuidade em $(0,0)$.

    b) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

    c) Calcule $Df(0,0)\cdot v$, para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

    d) Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

    e) Determine se f é diferenciável em $(0,0)$.

11. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

    (i) f tem derivadas parciais em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$;

    (ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

    Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.