Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 1

(Topologia. Limites. Continuidade)

1. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, o exterior e a fronteira e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado ou compacto.

   a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \pi\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1;\ x \in \mathbb{Q}\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$

   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$

   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,;\ y = x\}$

   h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

   i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} x;\ x > 0\}$

   j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1;\ y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}$

2. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2 y^2}{(x-2)^2 + y^2}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\operatorname{sen}^2 x + y^2}$

   f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

   g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(xy)$. (**Sugestão**: Considere a linha dada por $y = e^{-1/x^2}$)

   h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \ln(x^2 + y^4)$.

3. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

   a) $f(x,y) = e^{x^2 + 3y}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0\,, & \text{se } y = 0 \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

4. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que, para toda a reta $L \subset \mathbb{R}^2$ contendo $(0,0)$, se tem

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L}} f(x,y) = f(0,0).$$

Diga, justificando, se f é necessariamente contínua em $(0,0)$.

5. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existem os limites $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ e se tem

$$f(0,0) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Diga, justificando, se f é necessariamente contínua em $(0,0)$.