Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom

Teste 3 - Versão A - 5 de Janeiro de 2024 - 20h

Resolução abreviada

Teste 3

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, y, x - y + 2z).$$

(2 val.) (a) Determine os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

(2 val.) (b) Determine os espaços próprios generalizados de T.

(2 val.) (c) Determine uma forma canónica de Jordan para T, indicando a correspondente base de $\mathbb{R}^3$ para a qual T fica nessa forma canónica.

Resolução:

(a) A matriz que representa a transformação T na base canónica é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, que tem polinómio característico $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$, portanto os valores próprios são 1 e 2. Como o valor próprio 2 tem multiplicidade 1 como raiz do polinómio, podemos concluir que as multiplicidades algébrica e geométrica deste valor próprio são ambas iguais a 1.

O valor próprio 1 tem multiplicidade algébrica 2, pois é a multiplicidade como raiz do polinómio característico. Para determinar a sua multiplicidade geométrica temos de calcular a dimensão do seu espaço próprio $E(1)$, ou seja, a dimensão do núcleo da matriz $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Como esta matriz tem claramente característica 2, podemos concluir que a multiplicidade geométrica do valor próprio 1 é 1.

(b) O espaço próprio generalizado de 2 é igual ao seu espaço próprio. Assim calculamos o núcleo da matriz

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e portanto obtemos $E(2) = \{a(0, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\}$. Para $\lambda = 1$ temos

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

logo $E(1) = \{a(1,0,-1) : a \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado o espaço próprio generalizado de 1 é dado pelo núcleo de

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, $E^g(1) = \{a(1,0,-1) + b(0,1,0) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(c) Tendo em conta a alínea (a) podemos afirmar que uma forma canónica de Jordan para T é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando a alínea anterior podemos então escolher

$$v_3 = (0,1,0), \quad v_2 = (T-I)v_3 = (1,0,-1) \quad \text{e} \quad v_1 = (0,0,1),$$

e $B = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base para a qual a representação de T nessa base é dada pela matriz J.

2. Considere o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 com o produto interno definido pela matriz da métrica (ou de Gram)

$$G_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

com respeito à base $B = (1, t, t^2)$.

(2.5 val.) (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço dos polinómios de grau ≤ 1.

(2.5 val.) (b) Qual o polinómio de grau ≤ 1 mais próximo de $t^2 - t + 1$?

(1 val.) (c) Calcule a distância de $t^2 - t + 1$ ao subespaço de polinómios de grau ≤ 1.

(2 val.) (d) Determine o ângulo entre t e t^2.

Resolução:

(a) Consideramos a base $\{1, t\}$ do subespaço dos polinómios de grau ≤ 1 e aplicamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Fazendo $v_1 = 1$ e $v_2 = t$ a base ortogonal vai ser $B = \{w_1, w_2\}$ onde $w_1 = v_1$ e

$$w_2 = v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle \frac{w_1}{\|w_1\|^2}.$$

Uma vez que

$$\langle w_1, v_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

e

$$\|w_1\|^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

obtemos $w_2 = t - 1$ e $B = (1, t-1)$.

(b) O polinómio de grau ≤ 1 mais próximo de $v = t^2 - t + 1$ é a projecção ortogonal de v sobre o subespaço dos polinómios de grau ≤ 1, que denotamos por U. Para calcular a projecção ortogonal $P_U(v)$ usamos a base obtida na alínea anterior, pois esta projeção é a soma das projeções sobre cada um dos vectores de uma base ortogonal de U, ou seja,

$$P_U(v) = \langle w_1, v\rangle \frac{w_1}{\|w_1\|^2} + \langle w_2, v\rangle \frac{w_2}{\|w_2\|^2}$$

Temos

$$\langle w_1, v\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\langle w_2, v\rangle = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2,$$

e

$$\|w_2\|^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Logo $P_U(t^2 - t + 1) = 2 - 2t$ e este é o polinómio de grau ≤ 1 mais próximo de $t^2 - t + 1$.

(c) A distância de $t^2 - t + 1$ ao subespaço dos polinómios de grau ≤ 1 é

$$d = \|t^2 - t + 1 - P_U(t^2 - t + 1)\| = \|t^2 + t - 1\| = 1.$$

(d) O coseno do ângulo é dado por

$$\cos\angle(t, t^2) = \frac{\langle t, t^2\rangle}{\|t\|\|t^2\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$

logo o ângulo é $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. Considere a forma quadrática $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$g(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(2 val.) (a) Classifique g.

(2 val.) (b) Determine um subespaço $U \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão 2 tal que $g(u) \geq 0$ para todo o $u \in U$.

Resolução:

(a) A matriz simétrica associada à forma quadrática é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico desta matriz é $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2)$, portanto os valores próprios da matriz são $-2, 0$ e 4 e a forma quadrática é indefinida.

(b) O espaço próprio do valor próprio 4 é dado pelo núcleo da matriz

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

ou seja, $E(4) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. O espaço próprio do valor próprio 0 é dado pelo núcleo da matriz A, logo $E(0) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Então fazendo $U = E(0) \oplus E(4)$ temos $g(u) \geq 0$ para todo o $u \in U$. De facto

$$g(x, x, z) = 11x^2 \geq 0.$$

(2 val.) 4. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear auto-adjunta com 2 valores próprios distintos λ_1 e λ_2. Sabendo que o espaço próprio associado a λ_2 é dado por

$$E(\lambda_2) = L(\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 1, 1)\})$$

determine, justificando, o espaço próprio $E(\lambda_1)$.

Resolução: Se f é uma transformação linear auto-adjunta sabemos, pelo Teorema Espectral, que é diagonalizável e que os espaços próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais, logo o espaço próprio $E(\lambda_1)$ é o complemento ortogonal de $E(\lambda_2)$. Logo os vetores $(x, y, z, w) \in E(\lambda_1)$ satisfazem

$$\langle (1, 1, -1, 0), (x, y, z, w) \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), (x, y, z, w) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$x + y - z = 0 \quad \text{e} \quad x + y + z + w = 0.$$

Portanto

$$E(\lambda_1) = L(\{(1, 0, 1, -2), (0, 1, 1, -2)\}).$$