## ÁLGEBRA LINEAR

## RESOLUÇÃO DO TESTE DE 05/01/2024

## LMAC, LEFT

(1) Determine se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$ tenha $(1, 2, -1)$ como vetor próprio.

**Resolução:** Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1+2\alpha \\ -1-\alpha \end{bmatrix}$$

Para que $(1, 2, -1)$ seja um vetor próprio, o valor próprio teria de ser $-4$ e ter-se-ia que verificar

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha = -8 \\ -1 - \alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{9}{2} \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

Conclui-se que não existe um tal valor de $\alpha$.

(2) Considere o subespaço $V = L(\{\operatorname{sen} t, \cos t, t \operatorname{sen} t, t \cos t\})$ do espaço vetorial complexo das funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$ e o endomorfismo $T\colon V \to V$ definido por $T(f) = f'$.

(a) Determine os valores próprios de $T$ indicando as suas multiplicidades geométricas e algébricas.

(b) Determine a forma canónica de Jordan de $T$ indicando uma base $B$ para $V$ com respeito à qual $T$ é representada pela forma de Jordan achada.

**Resolução:**

(a) Temos $T(\operatorname{sen} t) = (\operatorname{sen} t)' = \cos t, T(\cos t) = -\operatorname{sen} t, T(t \operatorname{sen} t) = \operatorname{sen} t + t \cos t, T(t \cos t) =$ $\cos t - t \operatorname{sen} t$. Considerando a base ordenada $B = (\operatorname{sen} t, \cos t, t \operatorname{sen} t, t \cos t)$ para $V$ temos portanto

$$A_{T,B,B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$$

Conclui-se que os valores próprios de $T$ são $\pm i$ ambos com multiplicidade algébrica 2. Os vetores próprios de $\lambda = i$ são as soluções do sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}$$

que tem soluções $(a, b, c, d)$ definidas por $d = 0, c = -id = 0$ e $a = bi$. Conclui-se que os vetores próprios de $\lambda = i$ são os vetores com coordenadas $b(i, 1, 0, 0)$ (com $b \neq 0$) logo a multiplicidade geométrica de $\lambda = i$ é 1. Uma vez que $\lambda = -i$ é o conjugado de $i$ e a matriz $A_{T,B,B}$ é real, a sua multiplicidade geométrica é também 1.

(b) Tendo em conta as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios achados na alínea anterior vemos que a forma canónica de Jordan para $T$ é (a menos de troca de ordem dos blocos)

$$J = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Seja $B' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ uma base tal que $A_{T,B',B'} = J$. Então tendo em conta os cálculos da alínea anterior podemos tomar $v_1 = i \operatorname{sen} t + \cos t$. Para achar o vetor próprio generalizado $v_2$ de $\lambda = i$ resolvemos a equação $(T - i\,\mathrm{Id})(v_2) = v_1$ que em coordenadas fica o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & i & 2i \\ 1 & -i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & i & 2i \\ 1 & -i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2i & -2i \end{array}\right]$$

que tem solução $d = 1, c = 2i - di = i$ e $a = ib + 1 - d = ib$. Tomando por exemplo $b = 0$ obtemos $v_2 = it \operatorname{sen} t + t \cos t$. Para $v_3, v_4$ podemos tomar os vetores cujas coordenadas são as conjugadas. Obtemos assim

$$B' = (i \operatorname{sen} t + \cos t, it \operatorname{sen} t + t \cos t, -i \operatorname{sen} t + \cos t, -it \operatorname{sen} t + t \cos t)$$

(3) Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^3$ para o qual $\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base ortonormada. Determine a matriz da métrica de $\langle\ ,\ \rangle$ com respeito à base canónica.

**Resolução:** Sendo $B$ a base dada temos $G_B = I_3$. Pela fórmula para a mudança de coordenadas na matriz da métrica temos $G_{B_{can}} = S^T_{B_{can}\to B} G_B S_{B_{can}\to B}$. Como $(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,0)$ vemos que

$$S_{B_{can}\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$G_{B_{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Diga se a função $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$\langle x, y\rangle = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} y$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

**Resolução:** Uma vez que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 - 1 = -1$$

é negativo, algum dos valores próprios da matriz simétrica dada é negativo. Logo a forma quadrática não é definida positiva e portanto a função dada não satisfaz o axioma de positividade de um produto interno. Não se trata portanto de um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(5) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma decomposição SVD para $A$.

(b) Calcule a projeção ortogonal de $(1,1,1,1)$ em $N(A^T)$

**Resolução:**

(a) Temos $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ que é diagonal logo $U_2$ é a matriz $I_2$ e $D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Para obter $U_1$ precisamos de completar as colunas de $AU_2^{-1}$ a dividir pelos valores singulares a uma base ortonormada de $\mathbb{R}^4$: O complemento ortogonal das colunas de $A$ é definido pelas equações $x = -z + w, y = -z - w$ pelo que uma base é dada por $(-1, -1, 1, 0)$ e $(1, -1, 0, 1)$ Esta base já é ortogonal logo obtemos

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $N(A^T) = EC(A)^\perp$ e uma base ortonormada para o complemento ortogonal do espaço das colunas de $A$ é dado pelas duas últimas colunas de $U_1$ na alínea anterior. Conclui-se que

$$\begin{aligned} P_{N(A^T)}(1,1,1,1) &= \tfrac{1}{3}\langle(-1,-1,1,0),(1,1,1,1)\rangle(-1,-1,1,0) + \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\langle(1,-1,0,1),(1,1,1,1)\rangle(1,-1,0,1) \\ &= -\tfrac{1}{3}(-1,-1,1,0) + \tfrac{1}{3}(1,-1,0,1) = (\tfrac{2}{3}, 0, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \end{aligned}$$

(6) Seja $V$ um espaço vetorial complexo e $T\colon V \to V$ um endomorfismo com forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Descreva o grau de indeterminação do segundo vetor de uma base $B$ para a qual $A_{T,B,B} = J$, isto é, indique (justificadamente) o número mínimo de parâmetros complexos necessários para descrever o conjunto

$$\{v \in V : v \text{ é o segundo vetor de alguma base } B \text{ para } V \text{ tal que } A_{T,B,B} = J\}$$

**Resolução:** O primeiro vetor $v_1$ da base $B$ está determinado a menos de um fator constante não nulo pois é um vetor próprio de 2 que está na imagem de $(T - 2\,\mathrm{Id})^2$ (e a intersecção do espaço próprio de 2 com esta imagem tem dimensão 1). O segundo vetor $v_2$ é então qualquer solução da equação $(T - 2\,\mathrm{Id})(v_2) = v_1$. Uma vez que $N(T - 2\,\mathrm{Id})$ tem dimensão 2 as soluções desta equação dependem de 2 parâmetros (para cada valor possível de $v_1$. Conclui-se que o número de parâmetros complexos necessários para descrever todos os possíveis valores de $v_2$ é 3.