Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom

Teste 2 - Versão B - 28 de Novembro de 2023 - 20h

Resolução abreviada

Teste 2

(3 val.) 1. Determine uma base do subespaço

$$V = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

e complete-a para obter uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Resolução: As matrizes A que pertencem ao subespaço V satisfazem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+2b \\ c+d & c+2d \end{bmatrix}$$

portanto temos $a + c = b$ e $a = d$. Ou seja,

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & c+a \\ c & a \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto uma base para V pode ser dada por

$$B_V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e podemos completar esta base para obter uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, por exemplo, escolhendo

$$B_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Seja U o espaço dos polinómios de grau ≤ 2 e $g : U \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$g(p(t)) = (p(1), p(0), p''(1) + 2p'(0)).$$

Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to U$ representada pela matriz

$$A_{f,B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases ordenadas

$$B' = ((1,0,0),(0,1,1),(0,1,2)) \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad B = (1-t, t+t^2, 1-t^2) \text{ de } U.$$

(2 val.) (a) Determine a matriz que representa a transformação linear g em relação à base B de U e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Resolução: Temos

$$g(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + a_1 + a_2, a_0, 2a_2 + 2a_1),$$

logo a imagem dos vetores da base B é dada por

$$g(1-t) = (0,1,-2), \quad g(t+t^2) = (2,0,4) \quad \text{e} \quad g(1-t^2) = (0,1,-2).$$

Logo a matriz que representa g em relação à base B de U e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é

$$A_{g,B,B_{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2 val.) (b) Determine bases para o núcleo de g e para a imagem de g.

Resolução: O núcleo de g é dado por

$$N(g) = \{p(t) : g(p(t)) = 0\},$$

logo

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_2 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

donde concluimos que uma base para o núcleo pode ser

$$B_{N(g)} = \left\{t - t^2\right\}.$$

Como a imagem de g corresponde ao espaço das colunas da matriz que representa g, podemos escolher

$$B_{g(U)} = \{(0,1,-2), (2,0,4)\}.$$

(1 val.) (c) Diga, justificadamente, se g é um isomorfismo.

Resolução: A transformação g não é um isomorfismo, porque não é injetiva (o núcleo tem dimensão 1).

(2 val.) (d) Calcule $f(-1,1,2)$.

Resolução: Denotando os vetores da base B' por v_1, v_2 e v_3 temos

$$(-1,1,2) = -v_1 + v_3,$$

logo as coordenadas de $f(-1,1,2)$ na base B são dadas por

$$A_{f,B',B} \cdot [(-1,1,2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

donde concluimos que $f(-1,1,2) = -3 + 4t + 3t^2$.

(2,5 val.) (e) Determine a matriz mudança de base $S_{B_{can}\to B'}$ e aproveite para calcular $A_{f\circ g,B,B}$.

Resolução: Sendo e_1, e_2 e e_3 os vetores da base canónica temos $e_1 = v_1$, $e_2 = 2v_2 - v_3$ e $e_3 = -v_2 + v_3$, logo

$$S_{B_{can}\to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz que representa a composta é dada por

$$\begin{aligned} A_{f\circ g,B,B} &= A_{f,B_{can},B}\, A_{g,B,B_{can}} = A_{f,B',B}\, S_{B_{can}\to B'}\, A_{g,B,B_{can}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2 val.) (f) Determine o conjunto de soluções da equação linear $f(x, y, z) = 1 - 2t - t^2$.

Resolução: Começamos por notar que as coordenadas de $1 - 2t - t^2$ na base B são $(1, -1, 0)$. Usando os cálculos da alínea anterior sabemos que a matriz que representa f em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base B de U é dada por

$$A_{f,B_{can},B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

logo, para resolver a equação linear, temos de resolver o sistema representado pela matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de Gauss obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo as soluções são dadas por $y = -1$ e $x + y - z = 1$, ou seja, o conjunto de soluções é

$$\{(2 + z, -1, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(2, -1, 0) + z(1, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

3. Seja

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val.) (a) Calcule $\det[3C^{-2}C^T]$.

Resolução: Usando duas vezes a expansão de Laplace em relação à primeira coluna obtemos

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

logo

$$\det[3C^{-2}C^T] == 3^4(\det C)^{-2}\det C = 81(\det C)^{-1} = -\frac{81}{7}.$$

(1 val.) (b) Calcule a entrada (4,3) de C^{-1}.

Resolução:

$$[C^{-1}]_{43} = \frac{1}{\det C}\left[(\operatorname{cof} C)^T\right]_{43} = \frac{1}{\det C}[\operatorname{cof} C]_{34} = -\frac{1}{7}(-1)^7 \det C_{34}$$
$$= \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{7}.$$

(3 val.) 4. Considere uma matriz $B \in M_{6\times 7}(\mathbb{R})$. Calcule, justificando, $\det(B^TB)$.

Resolução: Uma vez que $N(B) \subset N(B^TB)$ temos $\dim N(B^TB) \geq \dim N(B)$. Por outro lado, como B é uma matriz 6×7 a caracteristica de B é no máximo 6, portanto da equação

$$\dim N(B) + \dim EL(B) = \text{nº colunas de } B = 7$$

concluimos que $\dim N(B) \geq 1$. Logo $\dim N(B^TB) \geq 1$ e a matriz B^TB não é invertível. Logo $\det(B^TB) = 0$.