Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEFT e LMAC

Teste 2 - 26 de Novembro de 2024 - 18h

Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

Teste 2

(2 val.) 1. Escreva a definição de transformação linear.

Resolução: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função $f : V \to W$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, para todo $v_1, v_2 \in V$;

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, para todo $v \in V$ e α escalar.

2. Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 3 e $T : \mathbb{R}^3 \to V$ a transformação linear definida por

$$T(1,1,0) = t^2 + t, \quad T(0,1,0) = 2t^2 + t^3, \quad T(1,0,1) = t^3 - t.$$

Considere a transformação linear $S : V \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$A_{S,B_2,B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases ordenadas

$$B_2 = (1, t, t^2, t^3) \text{ de } V \text{ e } B_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1)) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ (base canónica).}$$

(2 val.) (a) Determine a matriz A_{T,B_1,B_2} que representa a transformação T em relação à base $B_1 = ((1,1,0),(0,1,0),(1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base B_2 de V.

Resolução: As colunas da matriz A_{T,B_1,B_2} são dadas pelas coordenadas na base B_2 das imagens dos vetores da base B_1. Uma vez que $T(1,1,0) = t^2 + t$, $\quad T(0,1,0) = 2t^2 + t^3$ e $T(1,0,1) = t^3 - t$ concluimos que

$$A_{T,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) (b) Determine a dimensão do núcleo de T e uma base para a imagem de T. A transformação T é injectiva? E sobrejectiva? Justifique a sua resposta.

Resolução: Aplicando o método de Gauss à matriz A_{T,B_1,B_2} obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde concluimos que o núcleo de T é $N(T) = \{0\}$, logo $\dim N(T) = 0$. Por outro lado, como todas as colunas têm pivot e como o imagem de T corresponde em coordenadas ao espaço das colunas da matriz, concluimos que uma base para a imagem de T pode ser dada por

$$B_{T(\mathbb{R}^3)} = \{t^2 + t, 2t^2 + t^3, t^3 - t\}.$$

A transformação T é injectiva porque $N(T) = \{0\}$ e não é sobrejectiva, porque a imagem de T tem dimensão 3 e $\dim V = 4$.

(1 val.) (c) Calcule $S(1 + t + t^3)$.

Resolução: Em coordenadas na base canónica de $\mathbb{R}^2$ temos

$$\left[S(1 + t + t^3)\right]_{B_{\mathbb{R}^2}} = A_{S,B_2,B_{\mathbb{R}^2}} \; [1 + t + t^3]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Logo $S(1 + t + t^3) = (1, 4)$.

(3 val.) (d) Determine a matriz mudança de base $S_{B_{\mathbb{R}^3} \to B_1}$, onde $B_{\mathbb{R}^3} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Aproveite para calcular a matriz $A_{S \circ T, B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}}$, que representa a transformação $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Resolução: Sabemos que $S_{B_{\mathbb{R}^3} \to B_1} = (S_{B_1 \to B_{\mathbb{R}^3}})^{-1}$ portanto

$$S_{B_{\mathbb{R}^3} \to B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando este resultado podemos calcular

$$\begin{aligned} A_{S \circ T, B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}} &= A_{S,B_2,B_{\mathbb{R}^2}} \; A_{T,B_{\mathbb{R}^3},B_2} = A_{S,B_2,B_{\mathbb{R}^2}} \; A_{T,B_1,B_2} \; S_{B_{\mathbb{R}^3} \to B_1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(1 val.) (e) Escreva uma expressão para $S \circ T$.

Resolução: Usando o resultado da alínea anterior obtemos

$$[(S \circ T)(x,y,z)]_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y+z \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo $S(x,y,z) = (-x+2y+z, y)$, pois $B_{\mathbb{R}^2}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(2 val.) (f) Determine o conjunto de soluções da equação linear $S(p(t)) = (1,2)$.

Resolução: Queremos determinar os polinómios $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ tais que $S(p(t)) = (1,2)$. Em coordenadas temos de resolver o sistema não homogéneo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

O conjunto de soluções é dado por

$$\left\{(a_0,a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^4 : a_0 + a_2 = 1;\ a_1 - 2a_2 + a_3 = 0\right\}.$$

Logo as soluções da equação linear são os polinómios $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ tais que $a_0 = 1 - a_2$ e $a_1 = 2a_2 - a_3$, ou seja, o conjunto de soluções é dado por

$$\begin{aligned} CS &= \left\{\ 1 - a_2 + (2a_2 - a_3)t + a_2 t^2 + a_3 t^3,\ a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\ 1 + a_2(2t + t^2 - 1) + a_3(t^3 - t),\ a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Sabendo que $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & 1 \\ 1 & a+b & 2 \end{vmatrix} = 3$, calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 0 \\ b & ba+b^2 & 2b & 0 \\ ba & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det[2B^TB^{-1}] \end{vmatrix}.$$

Resolução: Começamos por calcular $\det[2B^TB^{-1}]$. Uma vez que $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, obtemos

$$\det[2B^TB^{-1}] = 2^2 \det[B^TB^{-1}] = 4 \det B \cdot \det[B^{-1}] = 4(\det B)(\det B)^{-1} = 4.$$

De seguida, usando a expansão de Laplace ao longo da última linha e os axiomas do determinante, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 0 \\ b & ba+b^2 & 2b & 0 \\ ba & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det[2B^TB^{-1}] \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & ba+b^2 & 2b \\ ba & a & a \end{vmatrix} = 4ab \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+b & 2 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -4ab \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & 1 \\ 1 & a+b & 2 \end{vmatrix} = -12ab. \end{aligned}$$

(3 val.) 4. Mostre que qualquer matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é da forma $X = A^T - 2A$ para alguma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Sugestão: Mostre que $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^T - 2A$ é uma transformação linear.

Resolução: Seguindo a sugestão começamos por notar que T é uma transformação linear:

(i) $T(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)^T - 2(A_1 + A_2) = A_1^T - 2A_1 + A_2^T - 2A_2 = T(A_1) + T(A_2)$;

(ii) $T(\alpha A) = (\alpha A)^T - 2(\alpha A) = \alpha(A^T - 2A) = \alpha T(A)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

O núcleo de T é dado por $N(T) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ A^T - 2A = 0\}$, ou seja,

$$A \in N(T) \Longleftrightarrow A^T = 2A.$$

Se $A = [a_{ij}]$ então $A \in N(T)$ sse

$$\begin{cases} 2a_{ij} = a_{ij}, \text{ se } i = j; \\ a_{ji} = 2a_{ij} \text{ e } a_{ij} = 2a_{ji}, \quad \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

donde concluimos que $a_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, ou seja, $A = 0$. Logo $N(T) = \{0\}$ e T é injectiva. Pelo Teorema da Característica-Nulidade, como os espaços de partida e chegada têm a mesma dimensão concluimos que T também é sobrejectiva, logo T é um isomorfismo. Portanto para qualquer matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ existe uma única matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $X = T(A) = A^T - 2A$, como pedido.