ÁLGEBRA LINEAR

RESOLUÇÃO DO EXAME DE 18/01/2024

LMAC, LEFT

(1) Considere a matriz 3×4 correspondente a um sistema não homogéneo de três equações a três incógnitas dependente dos dois parâmetros reais a, b:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & a+b & 1 & b \\ a & 1+b & ab & 2+b \\ a^2 & a^2+ab & a^2 & (a+1)b \end{array}\right]$$

Classifique em função de a, b o sistema correspondente como impossível, possível determinado ou possível indeterminado.

Resolução: Aplicando o método de Gauss obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & a+b & 1 & b \\ a & 1+b & ab & 2+b \\ a^2 & a^2+ab & a^2 & (a+1)b \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+b & 1 & b \\ 0 & 1-a & ab-1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a & b \end{array}\right]$$

Se $a=0$ obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

que é impossível se $b \neq 0$ e possível indeterminado se $b=0$. Se $a=1$ obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+b & 1 & b \\ 0 & 0 & b-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

que é impossível se $b \neq 0$ e possível indeterminado se $b=0$. Finalmente, se $a \notin \{0,1\}$ o sistema é possível e determinado (há um pivot em cada uma das três primeiras colunas). Temos assim que o sistema é

$$\begin{cases} \text{impossível} & \text{se } b \neq 0 \text{ e } (a=0 \text{ ou } a=1) \\ \text{possível indeterminado} & \text{se } b=0 \text{ e } (a=0 \text{ ou } a=1) \\ \text{possível determinado} & \text{se } a \notin \{0,1\} \end{cases}$$

(2) Sendo $A \in M_{3\times 3}(R)$ uma matriz invertível, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ calcule

$$A(C + 2A^{-1}B^{-1}A - 3I_3)A^{-1} - A(CA^T)(A^{-1})^T A^{-1}$$

Resolução: Uma vez que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ e a multiplicação é associativa e distributiva em relação à soma, a expressão dada simplifica-se em

$$ACA^{-1} + 2B^{-1} - 3I_3 - ACA^{-1} = 2B^{-1} - 3I_3$$

Aplicando Gauss-Jordan obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&2&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-2&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

pelo que a expressão é igual a

$$2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&-1&1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-5&2\\-1&0&-2\end{bmatrix}$$

(3) Mostre que $V=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon f \text{ tem derivada contínua.}\}$ é um subespaço vetorial do espaço das funções reais de variável real.
Resolução: A função nula tem derivada contínua logo $V\neq\emptyset$. Dadas $f,g\in V$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ temos que $f+g$ e αf são diferenciáveis com derivadas $f'+g'$ e $\alpha f'$ respetivamente. Uma vez que a soma de funções contínuas é contínua e o produto de uma função contínua por um escalar é uma função contínua conclui-se que $f+g\in V$ e $\alpha f\in V$ logo V é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(4) Determine uma base para o subespaço $U\cap V$ de $\mathbb{R}^4$ onde

$$U=L(\{(1,0,1,-1),(1,1,-1,0),(2,1,0,-1)\})$$
$$V=L(\{(1,-1,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,1)\})$$

Resolução: A condição

$$a(1,0,1,-1)+b(1,1,-1,0)+c(2,1,0,-1)=d(1,-1,0,1)+e(0,1,0,0)+f(1,0,1,1)$$

para um vetor pertencer a $U\cap V$ é equivalente ao sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0&-1\\0&1&1&1&-1&0\\1&-1&0&0&0&-1\\-1&0&-1&-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0&-1\\0&1&1&1&-1&0\\0&-2&-2&1&0&0\\0&1&1&-2&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0&-1\\0&1&1&1&-1&0\\0&0&0&3&-2&0\\0&0&0&-3&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0&-1\\0&1&1&1&-1&0\\0&0&0&3&-2&0\\0&0&0&0&-1&-2\end{bmatrix}$$

Portanto $e=-2f$ e $d=\frac{2}{3}e=-\frac{4}{3}f$. Conclui-se que

$$U\cap V=\{f(-\tfrac{4}{3}(1,-1,0,1)-2(0,1,0,0)+(1,0,1,1))\colon f\in\mathbb{R}\}=L(\{(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},1,-\tfrac{1}{3})\})$$

Pelo que uma base para $U\cap V$ é $\{(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3})\}$.

(5) Mostre ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: Seja V um espaço vetorial e $S,T\subset V$. Se S,T são linearmente independentes e $L(S)\cap L(T)=\{0\}$ então $S\cup T$ é linearmente independente.
Resolução: A afirmação é verdadeira. Sejam $v_1,\ldots v_n$ vetores distintos de $S\cup T$ e assumamos sem perda de generalidade que $v_1,\ldots,v_k\in S$ e $v_{k+1},\ldots v_n\in T$. Dados $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n=0$$

temos que o vetor

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = -\alpha_{k+1} v_{k+1} \ldots - \alpha_n v_n$$

pertence simultaneamente a $L(S)$ e $L(T)$ e é portanto o vetor 0. Uma vez que S é linearmente independente vemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ e, uma vez que T é linearmente independente, que $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Conclui-se que $S \cup T$ é linearmente independente.

(6) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine $\det(2A^2 A^T A^{-1} A^3)$.

Resolução: Uma vez que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, $\det(A^T) = \det A$ e o determinante é multilinear temos

$$\det(2A^2A^TA^{-1}A^3) = 2^2 \det(A)^2 \det(A^T)\frac{1}{\det A} \det(A)^3 = 4\det(A)^5 = 4(-1-2)^5 = -972.$$

(7) Considere o conjunto de vetores $\{(1,-1,0,2,1), (-1,2,1,0,3), (3,-4,-1,4,-1)\} \subset \mathbb{R}^5$. Qual é o número mínimo de vetores que é preciso adicionar a este conjunto para obter um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^5$? Justifique.

Resolução: Aplicando o método de Gauss temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja U o subespaço gerado pelo conjunto de vetores dados. Os cálculos acima mostram que U tem dimensão 2. Um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^5$ tem de conter pelo menos 5 vetores linearmente independentes (pois tem de conter uma base e $\dim \mathbb{R}^5 = 5$). Se contiver os três vetores dados (que formam um conjunto linearmente dependente) tem portanto que conter pelo menos mais três vetores. Por outro lado, completando um conjunto formado por dois dos vetores dados (que formam uma base para U) a uma base para $\mathbb{R}^5$ obtemos 3 vetores que juntamente com o conjunto dado (ou até quaisquer dois vetores do conjunto dado) formam um conjunto de geradores para $\mathbb{R}^5$. A resposta é portanto que o número mínimo de vetores a adicionar é 3.

(8) Sejam V o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 e considere as seguintes bases ordenadas $B_1 = (1-t, 1+t, t+t^2)$ e $B_c = (1, t, t^2)$ para V e a base

$$B_{can} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere as transformações lineares $T\colon V \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $g\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to V$ definidas por

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p'(0) \end{bmatrix}$$

e

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1-t \qquad g\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = t+t^2 \qquad g\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1-t^2 \qquad g\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1+t$$

(a) Determine $S_{B_c \to B_1}$.
(b) Determine $A_{T,B_1,B_{can}}$.
(c) Determine uma representação matricial à sua escolha para a transformação linear $g \circ T \circ g - 2g$.

(d) Resolva a equação linear $g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 - t$.

Resolução:

(a) Temos $1 = \frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}(1+t)$, $t = -\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}(1+t)$ e $t^2 = \frac{1}{2}(1-t)-\frac{1}{2}(1+t)+(t+t^2)$ logo

$$S_{B_c\to B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Temos $T(1-t) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right], T(1+t) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right], T(t+t^2) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ logo

$$A_{T,B_1,B_{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Uma vez que $g(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]) = g(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]) - g(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]) = -t - t^2$ temos

$$A_{g,B_{can},B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que a representação matricial pedida com respeito às bases B_{can} e B_1 é dada por

$$\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] - 2\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$$

(d) Da representação matricial de g acima é evidente que o núcleo de g é gerado por $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Uma vez que $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ é uma solução particular da equação, a solução geral é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(9) Seja A uma matriz 3×3 com determinante 7 tal que $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine o cofator 13 de A.

Resolução: Como $\det(A) = 7$ a matriz A é invertível e portanto $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{cof} A^T$. A equação do enunciado diz-nos que $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ é a primeira coluna de A^{-1} logo

$$3 = \frac{1}{\det A}\operatorname{cof}_{31} A^T = \frac{1}{\det A}\operatorname{cof}_{13} A \Leftrightarrow \operatorname{cof}_{13}(A) = 21$$

(10) Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Mostre que a aplicação

$$V \xrightarrow{\phi} L(L(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

definida por

$$(\phi(v))(T) = T(v)$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Resolução: Uma vez que $L(V,\mathbb{R})$ é isomorfo a $M_{1\times n}(\mathbb{R})$, tem dimensão n e, pelo mesmo argumento, $L(L(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ tem também dimensão n. É portanto suficiente verificar que ϕ é uma transformação linear injetiva. Dados escalares α, β, vetores $v, w \in V$ e $T \in L(V, \mathbb{R})$ temos

$$(\phi(\alpha v + \beta w))(T) = T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) = \alpha(\phi(v))(T) + \beta(\phi(w))(T)$$

logo ϕ é linear. Se $\phi(v)(T) = 0$ para todo o T então $T(v) = 0$ para todo o $T \colon V \to \mathbb{R}$. Mas se $v \neq 0$, existe $T \colon V \to \mathbb{R}$ com $T(v) = 1$ (pois existe uma base contendo v e uma transformação linear toma valores arbitrários numa base) logo $\phi(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, pelo que ϕ é injetiva.

(11) Determine se o subespaço $W = \{(x, y, z) \colon x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ é invariante para o endomorfismo $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (2x + y + 4z, 3x + 2y + 2z, 2y - z)$$

Resolução: Dado $(x, y, z) \in W$ temos

$$(2x + y + 4z) + (3x + 2y + 2z) + (2y - z) = 5x + 5y + 5z = 5(x + y + z) = 5 \cdot 0 = 0$$

logo $T(x, y, z) \in W$.

(12) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios indicando a sua multiplicidade geométrica e algébrica.
(b) Determine a forma canónica de Jordan J de A e uma matriz invertível S tal qie $A = SJS^{-1}$.

Resolução:

(a) O polinómio característico é

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 1)^3$$

logo o único valor próprio é $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica 3. A matriz $\left[\begin{smallmatrix} 2-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ tem característica 1 pelo que o espaço próprio de 1 tem dimensão 2 que é a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$.

(b) Pela alínea anterior a forma canónica de Jordan de A é dada (a menos da ordem dos blocos) por

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O espaço próprio de $\lambda = 1$ é definido pela equação $x + y - z = 0$ logo uma base é dada por $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. O vetor próprio do primeiro bloco tem de estar no espaço das colunas de $A - I$ pelo que tem de ser um múltiplo de $(1, 0, 1)$. Escolhendo $(1, 0, 1)$, o vetor próprio generalizado correspondente à segunda coluna de S é uma qualquer solução da equação $(A - I)v_2 = (1, 0, 1)$, por exemplo $v_2 = (1, 0, 0)$. Conclui-se que podemos tomar

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(13) Seja V um espaço vetorial real com base $B = (v_1, v_2, v_3)$ e com um produto interno cuja matriz da métrica é

$$G_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule a distância em V entre o vetor $v_1 + v_2$ e o subespaço $U = L(\{v_1 - v_2, v_3\})$.
Resolução: Uma vez que

$$\langle v_1 - v_2, v_3 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

os vetores $v_1 - v_2, v_3$ formam uma base ortogonal para U. A projeção ortogonal de $v_1 + v_2$ sobre U é portanto dada por

$$P_U(v_1 + v_2) = \frac{\langle v_1 - v_2, v_1 + v_2 \rangle}{\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle}(v_1 - v_2) + \frac{\langle v_3, v_1 + v_2 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3$$

O segundo termo na soma é claramente 0 enquanto que o primeiro é dado por

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}(v_1 - v_2) = \frac{1}{1}(v_1 - v_2)$$

A distância é portanto

$$\|(v_1 + v_2) - (v_1 - v_2)\| = \|2v_2\| = 2\|v_2\| = 2 \cdot 1 = 2$$

(14) Classifique a forma quadrática $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2yz - 2yw - 6zw$$

Resolução: A matriz simétrica associada a f é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

que tem polinómio característico

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) + 3 + 3 - (2-\lambda) - (5-\lambda) - 9(1-\lambda)\right) \\ &= (1-\lambda)(-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 + 6 - 16 + 11\lambda) \\ &= (1-\lambda)\lambda(-\lambda^2 + 8\lambda - 6) \end{aligned}$$

As raízes do fator quadrático $\frac{-8 \pm \sqrt{64-24}}{-2} = 4 \pm \sqrt{10}$ são ambas positivas logo todos os valores próprios da matriz simétrica são todos ≥ 0. Conclui-se que a forma quadrática é semi-definida positiva.

(15) Seja V um espaço vetorial real com produto interno, $v \in V$ e $U \subset V$ um subespaço finitamente gerado. Seja $X = \{u \in U \colon \|u\| \leq 1\}$ e considere a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = \langle v, u \rangle$$

Mostre que o máximo de f é $\|P_U(v)\|$ (onde $P_U\colon V \to V$ denota a projeção ortogonal sobre U).

Resolução: Escrevendo $v = P_U(v) + y$ com $y \perp U$ vemos que

$$f(u) = \langle P_U(v) + y, u\rangle = \langle P_U(v), u\rangle + 0$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $|f(u)| \leq \|P_U(v)\|\|u\| \leq \|P_U(v)\| \cdot 1 = \|P_U(v)\|$ logo o máximo de f é menor ou igual a $\|P_U(v)\|$. Se $P_U(v) = 0$ então a função é identicamente nula logo a afirmação a provar verifica-se. Caso contrário, tomando $u = \frac{P_U(v)}{\|P_U(v)\|}$ (que tem norma 1 e portanto pertence a X) obtemos

$$f(u) = \frac{\langle P_U(v), P_U(v)\rangle}{\|P_U(v)\|} = \|P_U(v)\|$$

logo a majoração para o máximo obtida acima é atingida num vetor de U, pelo que o máximo é $\|P_U(v)\|$.