Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

RESOLUÇÃO DO EXAME
10 DE FEVEREIRO DE 2023
DURAÇÃO: 120 MINUTOS

LMAC E LEFT

(1) Determine a base B de $\mathbb{R}^2$ para a qual

$$[(1,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad [(1,-1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Sendo B_c a base canónica de $\mathbb{R}^2$ temos

$$S_{B\to B_c} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

logo

$$S_{B\to B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left(-\tfrac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que as colunas de $S_{B\to B_c}$ contêm as coordenadas dos vetores de B na base canónica temos

$$B = \left(\left(\tfrac{1}{3}, -1\right), \left(\tfrac{2}{3}, 0\right)\right)$$

(2) Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e o subespaço

$$U_\alpha = L(\{(1,\alpha,1,2+\alpha), (1,\alpha,\alpha^2,1), (1,\alpha^2,\alpha,1)\})$$

(a) Determine a dimensão de U_α em função de α.
(b) Para $\alpha = 1$ determine uma base ortonormada para $U_\alpha^\perp$.

Resolução:

(a) Aplicando o método de Gauss temos

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 2+\alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 2+\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & -1-\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha-1 & -1-\alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 2+\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha-1 & -1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & -1-\alpha \end{bmatrix}$$

Quando $\alpha^2-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,1$ a matriz tem característica 2. Nos casos restantes, quando $\alpha = -1$ a terceira linha anula-se pelo que a característica é 2, caso contrário a característica é 3. Conclui-se que

$$\dim U_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = -1,0,1 \\ 3 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) O complemento ortogonal do espaço das linhas de uma matriz é o núcleo dessa matriz. Substituindo $\alpha = 1$ na matriz da alínea anterior obtermos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$U_1^\perp = \{(x,y,z,0)\colon x+y+z=0\} = \{(x,y,-x-y,0)\colon x,y\in\mathbb{R}\} = L(\{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\})$$

Aplicando o método de Gram-Schmidt obtemos um vetor ortogonal ao primeiro vetor da base indicada acima:

$$(0,1,-1,0)-\frac{\langle(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\rangle}{\|(1,0,-1,0)\|^2}(1,0,-1,0)=(0,1,-1,0)-\tfrac{1}{2}(1,0,-1,0)=(-\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{2},0)$$

Logo

$$\{(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0),(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},0)\}$$

é uma base ortonormada para $U_1^\perp$.

(3) Defina o que se entende por um conjunto linearmente dependente de vetores num espaço vetorial.
Resolução: Um subconjunto S de um subespaço vetorial V diz-se linearmente dependente se existem $v_1,\ldots,v_n\in S$ distintos e escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n=0$.

(4) Considere o espaço vetorial V dos polinómios de grau ≤ 2 com a base $B=(1,t,t^2)$ e o produto interno definido por

$$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(t)q(t)\;dt$$

(a) Determine a matriz da métrica deste produto interno em V com respeito à base B.
(b) Determine um conjunto de geradores para o subespaço de V ortogonal ao vetor t.

Resolução:
(a) A matriz da métrica é a matriz simétrica

$$\begin{bmatrix}\langle 1,1\rangle & \langle 1,t\rangle & \langle 1,t^2\rangle\\ \langle t,1\rangle & \langle t,t\rangle & \langle t,t^2\rangle\\ \langle t^2,1\rangle & \langle t^2,t\rangle & \langle t^2,t^2\rangle\end{bmatrix}$$

Uma vez que

$$\langle 1,1\rangle=\int_0^1 1\;dt=1,\qquad \langle 1,t\rangle=\int_0^1 t\;dt=\tfrac{1}{2},\quad \langle 1,t^2\rangle=\int_0^1 t^2\;dt=\tfrac{1}{3}$$

$$\langle t,t\rangle=\int_0^1 t^2\;dt=\tfrac{1}{3},\qquad \langle t,t^2\rangle=\int_0^1 t^3\;dt=\tfrac{1}{4},\quad \langle t^2,t^2\rangle=\int_0^1 t^4\;dt=\tfrac{1}{5}$$

temos

$$G_B=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

(b) Um vetor $x+yt+zt^2$ pertence a $\{t\}^\perp$ se

$$\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=0$$

Conclui-se que o plano pedido é determinado pela equação

$$\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}z$$

logo um conjunto de geradores para $\{t\}^\perp$ (uma base até) é dado por

$$\{-\tfrac{2}{3}+t,-\tfrac{1}{2}+t^2\}$$

(5) Determine se a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 4xz$$
assume algum valor negativo em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo indique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) < 0$.

Resolução: A matriz simétrica associada à forma quadrática f é ?
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Os valores próprios são as soluções de
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\left(((3-\lambda)(1-\lambda) - 8\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$
Uma vez que as raízes da equação $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ são -1 e 5 conclui-se que os valores próprios da matriz são $-1, 2$ e 5. Uma vez que há um valor próprio negativo, a função toma valores negativos, por exemplo na direção do vetor próprio correspondente ao valor próprio -1 que é a solução de
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}a \\ c = -a \end{cases}$$
Logo, por exemplo, $f(1, \frac{1}{2}, -1) = -\frac{9}{4} < 0$.

(6) Considere a transformação linear $T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ definida por
$$T(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a representação matricial de T com respeito a bases à sua escolha.
(b) Determine uma base para $\operatorname{Im}(T)$ e a dimensão do núcleo de T.
(c) Dê uma expressão para uma transformação linear $S\colon M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $S \circ T$ tenha forma canónica de Jordan $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Consideramos as bases canónicas
$$B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
Temos
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
e analogamente
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que

$$A_{T,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) O espaço das colunas de A_{T,B_1,B_2} é claramente gerado pelas primeira e terceira colunas, que são linearmente independentes logo uma base para $\operatorname{Im}(T)$ é

$$\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$$

Uma vez que $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, pelo Teorema da característica-nulidade temos

$$\dim N(T) = 4 - \dim \operatorname{Im}(T) = 4 - 2 = 2$$

(c) Seja $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ a base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A_{S\circ T,B,B}$ está na forma canónica de Jordan indicada no enunciado. Então v_3, v_4 geram o núcleo de $S \circ T$. Note-se que o núcleo de S não pode intersetar a imagem de T, caso contrário a característica de $S \circ T$ seria inferior a 2. Portanto v_3 e v_4 têm que gerar o núcleo de T. Tomamos por exemplo

$$v_3 = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \qquad v_4 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$$

O vetor v_1 tem de ser não nulo e verificar $S(T(v_1)) = 2v_1$. Podemos escolher para v_1 qualquer vetor que não esteja no núcleo de T, por exemplo

$$v_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \Rightarrow T(v_1) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$$

e temos então que definir

$$S(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]) = 2\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$$

Quanto a v_2, queremos que seja satisfeita a equação $(S \circ T)(v_2) = 2v_2 + v_1$ e podemos para tal escolher qualquer vetor v_2 tal que $T(v_2)$ seja linearmente independente de $T(v_1)$, por exemplo $v_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Temos então $T(v_2) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e portanto temos de definir

$$S\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = 2\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$$

Num complemento da imagem de T, S pode ser definida arbitrariamente. Podemos por exemplo tomar

$$S\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right) = S\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$$

e obtemos então a seguinte expressão para S:

$$S\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 2z+w & 0 \\ 2w & 0 \end{smallmatrix}\right]$$

(7) Determine as soluções da seguinte equação matricial

$$\det(A)A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolução: Aplicando o determinante à equação obtemos

$$\det(A)^3 \det(A^T) = 4 \Leftrightarrow \det(A)^4 = 4 \Leftrightarrow \det(A) = \pm\sqrt{2}.$$

Substituindo na equação vemos que

$$A = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Uma vez que o determinante das duas matrizes achadas é de facto $\pm\sqrt{2}$ concluímos que são estas as duas soluções da equação.

(8) Seja

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2-1 & 3 \\ x & x^2+1 & 1 & 1 \\ x^2 & 2 & 3 & -2 \\ x^3 & 1 & x-1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o determinante de $A(1)$ indicando se a matriz $A(1)$ é invertível.
(b) Justifique que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que a matriz $A(x)$ não é invertível.

Resolução:

(a) Aplicando a regra de Laplace ao longo da terceira coluna temos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -((2-2+3)-(6+1-2)) + 3((2+1+3)-(6+1+1)) \\ &= 2-6 = -4 \end{aligned}$$

Uma vez que o seu determinante não se anula, a matriz $A(1)$ é invertível.

(b) A função $\det A(x)$ é um polinómio de grau 7 pois na expansão do determinante em termos de produtos de entradas da matriz, o termo de maior grau corresponde ao produto das entradas $13, 22, 34$ e 41 que é

$$(x^2-1)(x^2+1)(-2)x^3$$

Temos portanto $\det A(x) = -2x^7 + q(x)$ com $q(x)$ de grau ≤ 6. Uma vez que os limites quando $x \to \pm\infty$ têm sinais contrários, pelo Teorema do valor médio $\det A(x)$ anula-se nalgum ponto $x \in \mathbb{R}$ e nesse ponto $A(x)$ não é invertível.

(9) Seja A a matriz com decomposição SVD dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a projeção ortogonal de $(1, 2, -1)$ no espaço das colunas de A.

(b) Determine a distância de $(1,2,3,-1)$ ao espaço das linhas de A.

Resolução:

(a) Uma base ortonormada para o espaço das colunas de A é dado pelas primeiras duas colunas da matriz U_1 pelo que a projeção é dada por

$$\langle (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}), (1,2,-1)\rangle (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) + \langle (0,1,0), (1,2,-1)\rangle (0,1,0) = (1,0,-1)+(0,2,0) = (1,2,-1)$$

embora pudéssemos também ter notado que o vetor pertence ao espaço das colunas e portanto é igual à sua própria projeção.

(b) Uma vez que o complemento ortogonal ao espaço das linhas de A é o núcleo de A, a distância pretendida é a norma da projeção ortogonal de $(1,2,3,-1)$ no núcleo de A. A matriz U_2 da decomposição SVD leva o núcleo de A no núcleo $\{(0,0,z,w)\}$ da matriz D logo as duas últimas colunas de $U_2^{-1} = U_2^T$, isto é as duas últimas linhas de U_2, são uma base ortonormada para o núcleo de A. Conclui-se que a projeção do vetor $(1,2,3,-1)$ no núcleo é dada por

$$\langle (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}), (1,2,3,-1)\rangle (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + \langle (0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}), (1,2,3,-1)\rangle (0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$
$$= (\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, 0, -\tfrac{4}{3}) + (0, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}(2,1,1,-3)$$

Conclui-se que a distância é $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

(10) Sejam $v_1 = (1,2,1,0)$ e $v_2 = (0,1,-1,2)$. Indique justificadamente se existe uma matriz anti-simétrica $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $Av_1 = v_2$ e $Av_2 = -v_1$.

Resolução: Seja A uma matriz satisfazendo $Av_1 = v_2$ e $Av_2 = -v_1$ e T o endomorfismo representado por A na base canónica. O plano $W = L(\{v_1, v_2\}$ é invariante por T e a restrição de T ao plano W é representada com respeito à base (v_1, v_2) pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem valores próprios $\pm i$ com vetores próprios $(1, \mp i)$. Portanto, quando encaramos A como uma matriz complexa, $v_1 \mp i v_2$ é um vetor próprio de A com valor próprio $\pm i$.

Se A fosse anti-simétrica, os dois vetores próprios $v_1 \pm i v_2$, correspondendo a valores próprios distintos, teriam de ser ortogonais em $\mathbb{C}^4$. Mas tal não é o caso:

$$\langle (1, 2-i, 1+i, -2i), (1, 2+i, 1-i, 2i)\rangle = 1+(2+i)^2+(1-i)^2+i^2 = 1+4+4i-1+1-2i-1-4 = 2i \neq 0$$

Conclui-se que não existe uma matriz satisfazendo as condições do enunciado.