Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom
Exame de Recuperação - 18 de Janeiro de 2024 - 13h
Duração: 2 horas
Nota do Exame = soma das notas dos Testes/3

Resolução abreviada

Grupo I – Teste 1 – 40 minutos

1. Seja α um parâmetro real e considere o sistema linear cuja a matriz aumentada é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \end{array}\right]$$

(a) (2 val.) Determine a característica de A em função de α.
Resolução: Começamos por aplicar o método de Gauss à matriz A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & -1 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{array}\right]$$

Assim podemos concluir que a característica de A é 2 se $\alpha = 1$, pois a matriz tem claramente 2 pivots e a característica é 3 se $\alpha \neq 1$.

(b) (3 val.) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.
Resolução: O sistema é impossível se $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = 1$ o sistema é possível e indeterminado. Não existem valores de α para os quais o sistema seja possível e determinado.

(c) (3 val.) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto de soluções do sistema.
Resolução: Se $\alpha = 1$ ficamos com a seguinte matriz aumentada (depois do método de Gauss)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

portanto o conjunto de soluções é dado por

$$\{(z-2, z-1, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

(d) (2 val.) Para $\alpha = 1$, determine equações cartesianas que descrevem o espaço das linhas de A.
Resolução: O espaço das linhas é gerado pelas linhas da matriz, logo

$$EL(A) = (\{(1, -1, 0, -1), (0, 1, -1, -1)\}).$$

Assim, os vetores de $EL(A)$ são dados por

$$(\alpha(1,-1,0,-1)+\beta(0,1,-1,-1)=(\alpha,-\alpha+\beta,-\beta,-\alpha-\beta) \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

e temos

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha+\beta \\ z=-\beta \\ w=-\alpha-\beta \end{cases}$$

Portanto,

$$EL(A)=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z=0 \text{ e } w+x=z\}.$$

2. (2 val.) Seja $A\in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível que satisfaz

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Determine a entrada $4,2$ (linha 4, coluna 2) de A^{-1}.

Resolução: Como A é invertível temos

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

O produto no lado direito dá-nos a segunda coluna de A^{-1}, logo a entrada $4,2$ de A^{-1} é igual a 4.

3. (2 val.) Sejam $A,B\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$. Determine a matriz X que satisfaz a equação $BX^TA-A^{-1}B^{-1}=0$.

Resolução:

$$BX^TA-A^{-1}B^{-1}=0\Leftrightarrow BX^TA=A^{-1}B^{-1}\Leftrightarrow X^T=B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1}\Leftrightarrow X^T=(AB)^{-1}(AB)^{-1}$$

ou seja,

$$X^T=(AB)^{-2}\Leftrightarrow X^T=((AB)^2)^{-1}$$

Portanto

$$X^T=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-3\\-2&1\end{bmatrix}.$$

4. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios de grau ≤ 2 e o subconjunto

$$U=\{a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2 : a_2=2a_0 \text{ e } a_1=0\}.$$

(a) (2 val.) Mostre que U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$.

Resolução: O polinómio nulo pertence a U, por isso $U \neq \emptyset$. Se $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ pertencem a U então

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2$$

satisfaz $a_2 + b_2 = 2(a_0 + b_0)$ e $a_1 + b_1 = 0$, logo U é fechado para a soma. Por outro lado $\alpha p(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2$ satisfaz claramente $\alpha a_2 = 2\alpha a_0$ e $\alpha a_1 = 0$, logo U é fechado para a multiplicação por escalar. Concluimos que U é um subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(b) (2 val.) Determine um conjunto gerador de U.

Resolução: Note-se que $U = \{a_0 + 2a_0t^2 : a_0 \in \mathbb{R}\} = \{a_0(1 + 2t^2) : a_0 \in \mathbb{R}\}$. Logo um conjunto gerador é $S = \{1 + 2t^2\}$.

5. (2 val.) Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = A + B$. Mostre que $AB = BA$.

Resolução:

$$AB = A + B \Leftrightarrow AB - A - B = 0 \Leftrightarrow AB - A - B + I = I \Leftrightarrow (A - I)(B - I) = I$$

Logo $A - I$ é a inversa de $B - I$, portanto

$$(B - I)(A - I) = I \Leftrightarrow BA - B - A = 0 \Leftrightarrow BA = A + B.$$

Finalmente $AB = A + B = BA$.

Grupo II – Teste 2 – 40 minutos

1. Considere o espaço linear de todas as funções reais de variável real e o subconjunto $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$.

(a) (1 val.) Verifique se S é linearmente independente.

Resolução: Uma vez que $2 = 2(\operatorname{sen}^2 + \cos^2 t) = 2\operatorname{sen}^2 + 2\cos^2 t$, concluimos que o conjunto é linearmente dependente.

(b) (2 val.) Determine, justificando, uma base para $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

Resolução: Uma base de $L(S)$ é dada por $\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$. As funções são linearmente independentes, pois se

$$\alpha \operatorname{sen}^2 t + \beta \cos^2 t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

então, em particular, para $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$ obtemos respectivamente $\beta = 0$ e $\alpha = 0$. Logo a dimensão de $L(S)$ é 2.

2. Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 1 e $T : V \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}.$$

Considere a transformação linear $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$A_{f,B_c,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$B_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e à base} \quad B = ((1,1),(1,-1)) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

(a) (2 val.) Determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base $B' = (1, t)$ de V e à base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Resolução: Começamos por calcular a imagem dos vetores da base B':

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz que representa T em relação às bases B' e B_c é dada por

$$A_{T,B',B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) (3 val.) Calcule $(f \circ T)(1-t)$.

Resolução: Usando o resultado da alínea anterior temos

$$[(f \circ T)(1-t)]_B = A_{f,B_c,B}\, A_{T,B',B_c}\, [1-t]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Logo $(f \circ T)(1-t) = 4(1,1) + 4(1,-1) = (8,0)$.

(c) (3 val.) Determine uma base para o núcleo de f.

Resolução: Calculando o núcleo da matriz $A_{f,B_c,B}$ obtemos

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ y - z + 2w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z + 3w \\ y = z - 2w \end{cases}$$

Portanto uma base para o núcleo de $A_{f,B_c,B}$ pode ser $B_{N(A_f)} = \{(-2,1,1,0),(3,-2,0,1)\}$ donde se conclui que uma base para o núcleo de f pode ser dada por

$$B_{N(f)} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) (2 val.) Diga, justificadamente, se $f \circ T$ é um isomorfismo.

Resolução: A matriz que representa $f \circ T$ em relação às bases B' e B é

$$A_{f\circ T,B',B} = A_{f,B_c,B}\, A_{T,B',B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que esta matriz é invertível, podemos concluir que $f \circ T$ é um isomorfismo.

(e) (2 val.) Resolva em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a equação linear $f(A) = (2, 0)$.

Resolução: O vetor $(2, 0)$ tem coordenadas $(1, 1)$ na base B, logo para obter as coordenadas das soluções temos de resolver o sistema linear representado pela seguinte matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix},$$

que tem soluções

$$\{(-1, 1, 0, 0) + z(-2, 1, 1, 0) + w(3, -2, 0, 1), z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Logo o conjunto de soluções para a equação linear é

$$CS = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. (3 val.) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A^7 - A^6)$.

Resolução: Temos $\det(A^7 - A^6) = \det(A^6(A - I)) = \det(A^6)\det(A - I) = (\det A)^6 \det(A - I)$, portanto é suficiente calcular o determinante de A e de $A - I$. Para calcular $\det A$ começamos por aplicar o método de Gauss à matriz A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando a expansão de Laplace obtemos $\det A = 2$. Por outro lado,

$$\det(A - I) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando a expansão de Laplace em relação à primeira linha obtemos

$$\det(A - I) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -2.$$

Finalmente obtemos $\det(A^7 - A^6) = -2^7$.

4. (2 val.) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = L(\{(1,1)\})$ e $T(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$.

Resolução: Um exemplo de uma matriz que representa T na base canónica pode ser

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

pois claramente satisfaz as condições para o núcleo e para a imagem (espaço das colunas da matriz). Logo um exemplo pode ser $T(x,y) = (2y-2x, y-x)$.

Grupo III – Teste 3 – 40 minutos

1. Para cada α considere a transformação linear $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica é representada pela matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) (3 val.) Mostre que $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,0,-1)$ são vetores próprios de T_α e determine os valores próprios associados.

Resolução: Temos

$$A_\alpha v_1 = \begin{bmatrix} \alpha+1 \\ 0 \\ \alpha+1 \end{bmatrix} = (\alpha+1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha+1)v_1 \quad \text{e} \quad A_\alpha v_2 = \begin{bmatrix} \alpha-1 \\ 0 \\ 1-\alpha \end{bmatrix} = (\alpha-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (\alpha-1)v_2$$

o que mostra que v_1 e v_2 são vetores próprios de T_α com valores próprios associados $\alpha+1$ e $\alpha-1$, respectivamente.

(b) (3 val.) Determine os valores próprios de T_α e indique os valores de α para os quais T_α tem 3 valores próprios todos distintos.

Resolução: O polinómio característico de A_α é

$$p(\lambda) = (3-\lambda)((\alpha-\lambda)^2 - 1) = (3-\lambda)(\lambda-(\alpha+1))(\lambda-(\alpha-1)),$$

portanto os valores próprios de T_α são $\lambda = 3$ ou $\lambda = \alpha \pm 1$. Assim, os valores próprios são distintos se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq 4$.

(c) (2 val.) Diga, justificando, se T_2 é diagonalizável.

Resolução: Se $\alpha = 2$ então os valores próprios são $\lambda = 3$ com multiplicidade algébrica 2 e $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica 1. Para determinar se T_2 é diagonalizável é suficiente determinar a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$, ou seja, a dimensão do espaço próprio $E(3) = N(A_2 - 3I)$. Como

$$A_2 - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

podemos concluir que os vetores do espaço próprio $E(3)$ satisfazem $y = 0$ e $x = z$ e portanto $E(3) = L(\{(1,0,1)\})$, que tem dimensão 1. Assim não é possível obter uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios, ou seja, T_2 não é diagonalizável.

(d) (3 val.) Para $\alpha = 3$, usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, calcule a projeção ortogonal de v_1 em $E(3)$ (espaço próprio associado ao valor próprio 3).

Resolução: Neste caso $E(3) = N(A_3 - 3I)$ e

$$A_3 - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então vemos que os vetores do espaço próprio $E(3)$ satisfazem $x = 0$ e $y + z = 0$ e portanto $E(3) = L(\{(0, 1, -1)\})$, ou seja, o vetor $u = (1, 0, 1)$ é uma base de $E(3)$. Logo a projeção ortogonal de v_1 em $E(3)$ é dada por

$$P_{E(3)}(v_1) = \langle v_1, u \rangle \frac{u}{\|u\|^2} = \langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle \frac{(0,1,-1)}{\|(0,1,-1)\|^2} = -\frac{1}{2}(0,1,-1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(e) (4 val.) Determine B tal que $B^2 = A_3$. *Sugestão: diagonalize.*

Resolução: Primeiro, da alínea (b) segue que A_3 tem valores próprios distintos $2, 3$ e 4 logo é diagonalizável, ou seja, existem matrizes S invertível e D diagonal tal que $A_3 = SDS^{-1}$. Mais precisamente, a matriz D tem na diagonal os valores próprios e S é base de vetores próprios correspondentes. Da alínea anterior temos uma base para $E(3)$ e da alínea (a) temos bases para os espaços próprios $E(2)$ e $E(4)$. Logo

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definimos $B = S\sqrt{D}S^{-1}$. Claramente $B^2 = SDS^{-1} = A_3$, portanto B é a solução pretendida. Calculando a inversa da matriz S obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2. (3 val.) Determine a expressão para o produto interno no espaço dos polinómios de grau ≤ 1 em relação ao qual a base $B = (1, 1 - t)$ é ortonormada.

Resolução: Se a base B é ortonormada, então a matriz da métrica é dada por $G_B = I$. Sejam $p(t) = a_0 + a_1 t$ e $q(t) = b_0 + b_1 t$. As coordenadas destes polinómios na base B são $(a_0 + a_1, -a_1)$ e $(b_0 + b_1, -b_1)$, respectivamente. Assim

$$\langle p(t), q(t) \rangle = [p(t)]_B G_B [q(t))_B = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} b_0 + b_1 \\ -b_1 \end{bmatrix} = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) + a_1 b_1,$$

ou seja, a expressão que define o produto interno é

$$\langle p(t), q(t) \rangle = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + 2 a_1 b_1.$$

3. (2 val.) Mostre que a forma quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ onde $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ é uma matriz anti-simétrica é identicamente nula.

Resolução: Sabemos que para uma forma quadrática como f, o que define a forma quadrática é a parte simétrica de A, dada por $\frac{A+A^T}{2}$. Uma vez que A é anti-simétrica, a sua parte simétrica é a matriz nula, logo f é a função constante igual a 0.