Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Exame 2 - 10 de Fevereiro de 2023 - 10h30

Duração: 2h

Resolução abreviada

Exame 2

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema linear

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\\alpha\\1\end{bmatrix},\quad \text{onde}\quad A=\begin{bmatrix}1&1&\alpha\\3&4&2\\2&3&-1\end{bmatrix}.$$

(2 val.) (a) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

(1 val.) (b) Para $\alpha = 3$, determine o conjunto de soluções do sistema.

(2 val.) (c) Para $\alpha = 3$ determine a dimensão e uma base para a intersecção do espaço das linhas de A com o subespaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

Resolução:

(a) Começamos por aplicar o método de Gauss à matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\alpha&2\\3&4&2&\alpha\\2&3&-1&1\end{array}\right]\underset{\substack{L_2-3L_1\\L_3-2L_1}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\alpha&2\\0&1&2-3\alpha&\alpha-6\\0&1&-1-2\alpha&-3\end{array}\right]\underset{L_3-L_2}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\alpha&2\\0&1&2-3\alpha&\alpha-6\\0&0&\alpha-3&3-\alpha\end{array}\right]$$

donde concluimos que o sistema é possível e indeterminado se $\alpha = 3$ e é possível e determinado se $\alpha \neq 3$. Não existem valores de α para os quais o sistema é impossível.

(b) Para $\alpha = 3$ a matriz aumentada fica

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&2\\0&1&-7&-3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

logo temos

$$\begin{cases}x+y+3z=2\\y-7z=-3\end{cases}\iff\begin{cases}x=5-10z\\y=7z-3\end{cases}$$

Portanto o conjunto de soluções do sistema é dado por $\{(5-10z, 7z-3, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(c) É claro da alínea anterior que, se $\alpha = 3$ então $EL(A) = L(\{(1,1,3),(0,1,-7)\})$ e temos $\dim EL(A) = 2$. Como $EL(A)$ não está contido em U concluimos que a dimensão da intersecção dos espaço das linhas de A com o subespaço U é 1. Por outro lado, $EL(A)^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z = 0;\, y-7z = 0\}$, portanto $EL(A)^{\perp} = L(\{(-10,7,1)\})$, ou seja, $EL(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -10x+7y+z = 0\}$. Logo

$$EL(A) \cap U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -10x+7y+z = 0;\, x+y+z = 0\}$$

e assim uma base para a interseção pode ser, por exemplo, $\{(-6,-11,17)\}$.

2. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja representação nas bases ordenadas $B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ e $B_2 = ((1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1))$ é

$$A_{T,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) (a) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$.

(1 val.) (b) Indique, justificando, se a imagem de T é isomorfa a um plano em $\mathbb{R}^3$.

(1 val.) (c) Determine o núcleo de T.

(1 val.) (d) Resolva em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a equação linear $T(A) = (5,1,-1)$.

(2 val.) (e) Considere o produto interno em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$. Determine a distância de $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ao núcleo de T.

Resolução:

(a)

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) + 2T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 3(1,0,0) - (0,1,1) + 2(2(1,0,0) + (0,1,-1)) = (7,1,-3). \end{aligned}$$

(b) A imagem de T é isomorfa ao espaço das colunas da matriz A_{T,B_1,B_2}, que tem dimensão 3 ($=$ característica da matriz), logo não pode ser isomorfa a um plano em $\mathbb{R}^3$, pois um plano tem dimensão 2.

(c) Resolvendo o sistema homogéneo associado à matriz A_{T,B_1,B_2} concluimos que as coordenadas (a,b,c,d) na base B_1 dos vetores do núcleo satisfazem

$$\begin{cases} 3a + 2d = 0 \\ 2b - c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = d = 0 \\ c = 2b, \quad b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Logo os vetores do núcleo são dados por

$$N(T) = \left\{ b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) As coordenadas do vetor $(5,1,-1)$ na base B_2 são $(5,0,1)$, portanto temos de resolver o sistema

$$A_{T,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de soluções deste sistema é $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = d = 1,\ c = 2b,\ b \in \mathbb{R}\}$, que representam as coordenadas das soluções da equação linear na base B_1. Logo o conjunto de soluções da equação é dado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) A distância de $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ a $N(T)$ é dada por $d = \|B - P_{N(T)}B\|$ onde $P_{N(T)}B$ representa a projecção ortogonal de B sobre o núcleo de T. Para calcular a projecção ortogonal usamos como base do núcleo a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ obtida na alínea (c). Assim obtemos

$$P_{N(T)}B = \operatorname{proj}_A B = \langle A, B \rangle \frac{A}{\|A\|^2} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$d = \left\| \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle} = 2.$$

(2 val.) 3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 0 & d & 1 \end{bmatrix}$ tal que $\det A = 3$ e $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Calcule

$$\det \begin{bmatrix} \det(2B^TB^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2d & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Usando as propriedades do determinante, uma vez que $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, obtemos $\det(2B^TB^{-1}) = 2^2 \det(B^TB^{-1}) = 4(\det B)(\det B)^{-1} = 4$. De seguida, usando a regra de Laplace, a linearidade e anti-simetria do determinante, obtemos

$$\begin{vmatrix} \det(2B^TB^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2d & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2d & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 0 & 2d & 2 \end{vmatrix} = -8 \det A = -24.$$

4. Seja V o espaço linear dos polinómios reais de grau ≤ 2. Considere a transformação linear $T : V \to V$ tal que

- $1 + t^2$ é um vetor próprio com valor próprio 1;
- $1 + t$ é um vetor próprio com valor próprio 3;
- o núcleo de T é dado por $N(T) = \{\alpha t^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(1 val.) (a) Determine a matriz mudança de base $S_{B\to B_c}$ da base $B = (1 + t^2, 1 + t, t^2)$ para a base canónica $B_c = (1, t, t^2)$.

(1 val.) (b) Determine a matriz que representa T na base canónica B_c.

(1 val.) (c) Determine a expressão geral da transformação linear T.

Resolução:

(a) As colunas da matriz mudança de base $S_{B\to B_c}$ são dadas pelas coordenadas dos vetores da base B escritos como combinação linear dos vetores da base canónica, logo

$$S_{B\to B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Temos $T(1 + t^2) = 1 + t^2, T(1 + t) = 3(1 + t)$ e $T(t^2) = 0$, logo é fácil de concluir que $T(1) = 1 + t^2$ e $T(t) = 2 + 3t - t^2$. Assim a matriz que representa T na base canónica é

$$A_{T,B_c,B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente podíamos começar por escrever a matriz que representa T na base B, o que é imediato, pois é uma base vetores próprios

$$A_{T,B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e de seguida usar a matriz mudança de base da alínea (a) e a sua inversa para obter a matriz desejada:

$$A_{T,B_c,B_c} = S_{B\to B_c} A_{T,B,B} (S_{B\to B_c})^{-1}.$$

(c) Usando a matriz obtida na alínea anterior, sabemos que as coordenadas da imagem do polinómio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ na base canónica são dadas por

$$[T(p(t))]_{B_c} = A_{T,B_c,B_c} [p(t)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + 2a_1 \\ 3a_1 \\ a_0 - a_1 \end{bmatrix}.$$

Logo $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + 2a_1 + 3a_1 t + (a_0 - a_1)t^2 = a_0(1 + t^2) + a_1(2 + 3t - t^2)$.

5. Considere a forma quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + 4xy - 3z^2$.

(1 val.) (a) Classifique f.

(1 val.) (b) Determine um subespaço $U \in \mathbb{R}^3$ de dimensão 1 tal que $f(u) \geq 0$ para todo o $u \in U$.

Resolução:

(a) A matriz simétrica associada à forma quadrática é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico desta matriz é $p(\lambda) = (-3-\lambda)^2(1-\lambda)$, portanto os valores próprios da matriz são -3 e 1 e a forma quadrática é indefinida.

(b) O espaço próprio do valor próprio 1 é dado pelo núcleo da matriz

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

ou seja, $E(1) = \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Então fazendo $U = E(1)$ temos $f(u) \geq 0$ para todo o $u \in U$. De facto

$$f(x,x,0) = -x^2 - x^2 + 4x^2 = 2x^2 \geq 0.$$

(2 val.) 6. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes simétricas tal que B tem valores próprios positivos. Mostre que BA é diagonalizável. *Sugestão: mostre que existe uma matriz X tal que $B = XX^T$ e considere a matriz $X^{-1}BAX$.*

Resolução:

Uma vez que B é simétrica, sabemos pelo Teorema Espectral que B é diagonalizável por uma matriz ortogonal, ou seja, $B = S^T \Lambda S$ onde S é uma matriz ortogonal ($S^TS = I$ e portanto $S^T = S^{-1}$) e Λ é uma matriz diagonal com os valores próprios de B. Como os valores próprios de B são positivos a matriz $\sqrt{\Lambda}$ está bem definida e podemos escrever $B = XX^T$ onde $X = (\sqrt{\Lambda}S)^T$. De seguida notamos que $X^{-1}BAX = X^{-1}XX^TAX = X^TAX$ e que esta matriz é simétrica pois A é simétrica:

$$(X^TAX)^T = X^TA^TX = X^TAX.$$

Pelo Teorema Espectral X^TAX é diagonalizável, ou seja, $X^TAX = C^{-1}DC$ onde C é uma matriz ortogonal e D é uma matriz diagonal. Assim obtemos

$$X^{-1}BAX = C^{-1}DC \Leftrightarrow BA = XC^{-1}DCX^{-1}.$$

Se $Q = CX^{-1}$ então $BA = Q^{-1}DQ$, ou seja, BA é diagonalizável.