Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Exame 1 - Versão B - 26 de Janeiro de 2023 - 18h

Duração: 1h

Exame 1

1. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x, y + 2z, x + z).$$

(2 val.) (a) Determine os valores próprios de f, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

(2 val.) (b) Determine uma forma canónica de Jordan para f, indicando a correspondente base de $\mathbb{R}^3$ para a qual f fica nessa forma canónica.

(2 val.) 2. Considere uma transformação linear $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tem como espaços próprios

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \quad \text{e} \quad L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Diga, justificadamente, se a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de T e se T é diagonalizável.

3. Considere o subespaço

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + d = 0,\ b = c\}$$

dos polinómios de grau ≤ 3 com o produto interno para o qual $\{1 + x + x^2 - x^3, x^3 - 1\}$ é uma base ortonormada.

(2 val.) (a) Calcule $\|2x + 2x^2\|$.

(2 val.) (b) Determine a matriz da métrica (ou de Gram) deste produto interno com respeito à base $B = (1 - x^3, x + x^2)$.

4. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e o subespaço

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0;\ x - y + w = 0\}.$$

(2 val.) (a) Determine uma base ortogonal para V.

(2 val.) (b) Calcule a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, 1)$ sobre V.

(1 val.) (c) Decomponha o vetor $(1, 1, 0, 1)$ como a soma de um vetor de V e de outro em $V^\perp$.

(2 val.) 5. Determine a decomposição polar da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(3 val.) 6. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ com A hermitiana tal que $A^3B = BA^3$. Mostre que $AB = BA$.