Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom

Teste 3 - Versão B - 5 de Janeiro de 2024 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 3

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y, 2y, x - y + z).$$

(2 val.) (a) Determine os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

(2 val.) (b) Determine os espaços próprios generalizados de T.

(2 val.) (c) Determine uma forma canónica de Jordan para T, indicando a correspondente base de $\mathbb{R}^3$ para a qual T fica nessa forma canónica.

2. Considere o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 com o produto interno definido pela matriz da métrica (ou de Gram)

$$G_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

com respeito à base $B = (1, t, t^2)$.

(2.5 val.) (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço dos polinómios de grau ≤ 1.

(2.5 val.) (b) Qual o polinómio de grau ≤ 1 mais próximo de $t^2 + 1$?

(1 val.) (c) Calcule a distância de $t^2 + 1$ ao subespaço de polinómios de grau ≤ 1.

(2 val.) (d) Determine o ângulo entre 1 e t^2.

3. Considere a forma quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(2 val.) (a) Classifique f.

(2 val.) (b) Determine um subespaço $V \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão 2 tal que $f(v) \leq 0$ para todo o $v \in V$.

(2 val.) 4. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear auto-adjunta com 2 valores próprios distintos λ_1 e λ_2. Sabendo que o espaço próprio associado a λ_1 é dado por

$$E(\lambda_1) = L(\{(1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, -1)\})$$

determine, justificando, o espaço próprio $E(\lambda_2)$.