Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Exame 1 - Versão A - 26 de Janeiro de 2023 - 18h

Duração: 1h

Exame 1

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + z, 2y, 2y + 2z).$$

(2 val.) (a) Determine os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

(2 val.) (b) Determine uma forma canónica de Jordan para T, indicando a correspondente base de $\mathbb{R}^3$ para a qual T fica nessa forma canónica.

(2 val.) 2. Considere uma transformação linear $f : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ que tem como espaços próprios

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}\right) \quad \text{e} \quad L\left(\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}\right).$$

Diga, justificadamente, se a matriz $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ é um vetor próprio de f e se f é diagonalizável.

3. Considere o subespaço

$$V = \{a + bt + ct^2 + dt^3 : a = d,\ b + c = 0\}$$

dos polinómios de grau ≤ 3 com o produto interno para o qual $\{1 + t - t^2 + t^3, t^2 - t\}$ é uma base ortonormada.

(2 val.) (a) Calcule $\|1 + t^3\|$.

(2 val.) (b) Determine a matriz da métrica (ou de Gram) deste produto interno com respeito à base $B = (1 + t^3, t - t^2)$.

4. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e o subespaço

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + z - w = 0;\ x - y = 0\}.$$

(2 val.) (a) Determine uma base ortogonal para U.

(2 val.) (b) Calcule a projeção ortogonal do vetor $(0, 1, 1, 1)$ sobre U.

(1 val.) (c) Decomponha o vetor $(0, 1, 1, 1)$ como a soma de um vetor de U e de outro em $U^\perp$.

(2 val.) 5. Determine a decomposição polar da matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$.

(3 val.) 6. Sejam $C, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ com C hermitiana tal que $C^3B = BC^3$. Mostre que $CB = BC$.