Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom

Teste 3 - Versão A - 5 de Janeiro de 2024 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 3

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x, y, z) = (x + y, y, x - y + 2z).$$
   (2 val.) (a) Determine os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.
   (2 val.) (b) Determine os espaços próprios generalizados de T.
   (2 val.) (c) Determine uma forma canónica de Jordan para T, indicando a correspondente base de $\mathbb{R}^3$ para a qual T fica nessa forma canónica.

2. Considere o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 com o produto interno definido pela matriz da métrica (ou de Gram)
$$G_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
com respeito à base $B = (1, t, t^2)$.
   (2.5 val.) (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço dos polinómios de grau ≤ 1.
   (2.5 val.) (b) Qual o polinómio de grau ≤ 1 mais próximo de $t^2 - t + 1$?
   (1 val.) (c) Calcule a distância de $t^2 - t + 1$ ao subespaço de polinómios de grau ≤ 1.
   (2 val.) (d) Determine o ângulo entre t e t^2.

3. Considere a forma quadrática $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão
$$g(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
   (2 val.) (a) Classifique g.
   (2 val.) (b) Determine um subespaço $U \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão 2 tal que $g(u) \geq 0$ para todo o $u \in U$.

(2 val.) 4. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear auto-adjunta com 2 valores próprios distintos λ_1 e λ_2. Sabendo que o espaço próprio associado a λ_2 é dado por
$$E(\lambda_2) = L(\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 1, 1)\})$$
determine, justificando, o espaço próprio $E(\lambda_1)$.