TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

TERCEIRO TESTE - VERSÃO B
26 DE JANEIRO DE 2023 - 8H
DURAÇÃO: 60 MINUTOS

LMAC E LEFT

(2 val) (1) Seja V o espaço vetorial dos polinómios e $T\colon V \to V$ o endomorfismo definido por

$$T(p(t)) = 2p'(1)(t^2 + 2t - 3) + p(-3)(t^3 + t - 1)$$

Verifique que o vetor $t^2 + 2t - 3$ é um vetor próprio de T indicando o valor próprio correspondente.

(2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, y, -x + y)$$

(4 val) (a) Determine a forma canónica de Jordan de T assim como a base para $\mathbb{C}^3$ que coloca T em forma canónica de Jordan.

(1 val) (b) Indique o maior subespaço $W \subset \mathbb{C}^3$ invariante por T tal que a restrição de T a W é diagonalizável.

(3) Seja $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + w = 0, y - z = 0\}$ e considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$.

(2,5 val) (a) Determine uma base ortogonal para U.

(1,5 val) (b) Sendo $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ com v_1 e v_2 os vetores que achou na alínea anterior, calcule a primeira coordenada de $(0, 1, 1, 0)$ na base B.

(1 val) (c) Explique como calcular (indique os cálculos a efetuar sem os levar até ao fim) a distância entre U e o conjunto $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + w = 2, y - z = 1\}$.

(1 val) (4) Explique porque é que a seguinte matriz é diagonalizável.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1+i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 2i & 1 \\ 1 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2 val) (5) Classifique a forma quadrática definida por

$$f(x, y, z, w) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy + 3zw$$

(2 val) (6) Determine uma decomposição em valores singulares para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(1 val) (7) Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T\colon V \to V$ um endomorfismo. Se a multiplicidade algébrica do valor próprio λ for 5 e as características de $(T - \lambda\,\mathrm{Id})^3$ e $(T - \lambda\,\mathrm{Id})^4$ forem iguais, quais são os possíveis valores para a dimensão do núcleo de $(T - \lambda\,\mathrm{Id})^2$?

(2 val) (8) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Mostre que um endomorfismo $T\colon V \to V$ é diagonalizável se e só se existe um produto interno em V com respeito ao qual T é auto-adjunto.