Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

TERCEIRO TESTE - VERSÃO A
26 DE JANEIRO DE 2023 - 8H
DURAÇÃO: 60 MINUTOS

LMAC E LEFT

(2 val) (1) Seja V o espaço vetorial dos polinómios reais e $T\colon V \to V$ o endomorfismo definido por
$$T(p(t)) = p(2)(t^2+5) - p'(2)(t^3-2t^2+t-2)$$
Verifique que t^3-2t^2+t-2 é um vetor próprio de T indicando o valor próprio correspondente.

(2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por
$$T(x,y,z) = (x+y+z, 2y, -x+y+3z)$$

(4 val) (a) Determine a forma canónica de Jordan de T assim como a base para $\mathbb{C}^3$ que coloca T em forma canónica de Jordan.

(1 val) (b) Indique o maior subespaço $W \subset \mathbb{C}^3$ invariante por T tal que a restrição de T a W é diagonalizável.

(3) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y-z=0, x-z+w=0\}$ e considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$.

(2,5 val) (a) Determine uma base ortogonal para U.

(1,5 val) (b) Sendo $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ com v_1 e v_2 os vetores que achou na alínea anterior, calcule a segunda coordenada de $(1,0,0,0)$ na base B.

(1 val) (c) Explique como calcular (indique os cálculos a efetuar sem os levar até ao fim) a distância entre U e o conjunto $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y-z=1, x-z+w=3\}$.

(1 val) (4) Explique porque é que a seguinte matriz é diagonalizável.
$$\begin{bmatrix} -i & 2+3i & 0 & i \\ -2+3i & 0 & -i & 1 \\ 0 & -i & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 & i \end{bmatrix}$$

(2 val) (5) Classifique a forma quadrática definida pela expressão
$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(2 val) (6) Determine uma decomposição em valores singulares para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(1 val) (7) Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T\colon V \to V$ um endomorfismo. Se a multiplicidade algébrica do valor próprio λ for 7 e as características de $(T - \lambda\,\mathrm{Id})^2$ e $(T - \lambda\,\mathrm{Id})^3$ forem iguais, quais são os valores possíveis para a multiplicidade geométrica de λ?

(2 val) (8) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Mostre que um endomorfismo $T\colon V \to V$ é diagonalizável se e só se existe um produto interno em V com respeito ao qual T é auto-adjunto.