Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Teste 2 - Versão B - 6 de Dezembro de 2022 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 2

1. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z,w) = (x+y+w, y+z, x+z+w).$$

(4 val.) (a) Determine bases para o núcleo e para a imagem de f.

(1 val.) (b) Diga, justificadamente, se f é injetiva.

2. Seja U o espaço dos polinómios de grau ≤ 1 e $g : U \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$g(1) = (1,0), \quad g(2+t) = (1,1).$$

Considere a transformação linear $h : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to U$ representada pela matriz

$$A_{h,B_{can},B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com respeito às base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B_{can} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$, e a base ordenada $B_2 = (1-t, 1+t)$ de U.

(2 val.) (a) Considere a base ordenada $B_1 = (1, 2+t)$ de U. Determine a matriz mudança de base $S_{B_1 \to B_2}$.

(2 val.) (b) Determine a matriz que representa g com respeito às base B_2 e a base canónica de $\mathbb{R}^2$, e diga, justificadamente, se g é um isomorfismo.

(2 val.) (c) Calcule $h\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

(1 val.) (d) Determine a representação matricial de $g \circ h$ com respeito às bases canónicas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$.

(2 val.) (e) Determine o conjunto de soluções da equação linear $h(A) = 1-2t$, onde $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1.5 val.) (a) Calcule o determinante de B.

(1.5 val.) (b) Calcule a entrada (4,1) de B^{-1}.

(3 val.) 4. Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, com $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = n$. Mostre que $\operatorname{car}(AB) = n$.