Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom

Teste 2 - Versão B - 28 de Novembro de 2023 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 2

(3 val.) 1. Determine uma base do subespaço

$$V = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

e complete-a para obter uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Seja U o espaço dos polinómios de grau ≤ 2 e $g : U \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$g(p(t)) = (p(1), p(0), p''(1) + 2p'(0)).$$

Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to U$ representada pela matriz

$$A_{f,B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases ordenadas

$$B' = ((1,0,0), (0,1,1), (0,1,2)) \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad B = (1-t, t+t^2, 1-t^2) \text{ de } U.$$

(2 val.) (a) Determine a matriz que representa a transformação linear g em relação à base B de U e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(2 val.) (b) Determine bases para o núcleo de g e para a imagem de g.

(1 val.) (c) Diga, justificadamente, se g é um isomorfismo.

(2 val.) (d) Calcule $f(-1, 1, 2)$.

(2,5 val.) (e) Determine a matriz mudança de base $S_{B_{can}\to B'}$ e aproveite para calcular $A_{f\circ g,B,B}$.

(2 val.) (f) Determine o conjunto de soluções da equação linear $f(x, y, z) = 1 - 2t - t^2$.

3. Seja

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val.) (a) Calcule $\det[3C^{-2}C^T]$.

(1 val.) (b) Calcule a entrada (4,3) de C^{-1}.

(3 val.) 4. Considere uma matriz $B \in M_{6\times 7}(\mathbb{R})$. Calcule, justificando, $\det(B^T B)$.