Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Teste 2 - Versão A - 6 de Dezembro de 2022 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 2

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x,y,z) = (y, x+z, 0, x-y+z).$$

(4 val.) (a) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T.

(1 val.) (b) Diga, justificadamente, se T é sobrejetiva.

2. Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 1 e $f : V \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$f(t) = (0,1), \quad f(1+2t) = (1,1).$$

Considere a transformação linear $g : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to V$ representada pela matriz

$$A_{g,B_{can},B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

com respeito às base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B_{can} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$, e a base ordenada $B_1 = (1+t, 1-t)$ de V.

(2 val.) (a) Considere a base ordenada $B_2 = (t, 1+2t)$ de V. Determine a matriz mudança de base $S_{B_2 \to B_1}$.

(2 val.) (b) Determine a matriz que representa f com respeito às base B_1 e a base canónica de $\mathbb{R}^2$, e diga, justificadamente, se f é um isomorfismo.

(2 val.) (c) Calcule $g\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

(1 val.) (d) Determine a representação matricial de $f \circ g$ com respeito às bases canónicas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$.

(2 val.) (e) Determine o conjunto de soluções da equação linear $g(A) = 2t$, onde $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1.5 val.) (a) Calcule o determinante de A.

(1.5 val.) (b) Calcule a entrada (3,2) de A^{-1}.

(3 val.) 4. Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, com $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = n$. Mostre que $\operatorname{car}(AB) = n$.