Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom

Teste 2 - Versão A - 28 de Novembro de 2023 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 2

(3 val.) 1. Determine uma base do subespaço

$$U = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \right\}$$

e complete-a para obter uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 2 e $f : V \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$f(p(t)) = (p(0), p'(1), p''(0) + p'(0)).$$

Considere a transformação linear $g : \mathbb{R}^3 \to V$ representada pela matriz

$$A_{g,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases ordenadas

$$B_1 = ((1,1,0),(2,1,0),(0,0,1)) \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad B_2 = (1+t, t+t^2, 1+t^2) \text{ de } V.$$

(2 val.) (a) Determine a matriz que representa a transformação linear f em relação à base B_2 de V e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(2 val.) (b) Determine bases para o núcleo de f e para a imagem de f.

(1 val.) (c) Diga, justificadamente, se f é um isomorfismo.

(2 val.) (d) Calcule $g(1,1,1)$.

(2,5 val.) (e) Determine a matriz mudança de base $S_{B_{can}\to B_1}$ e aproveite para calcular $A_{g\circ f,B_2,B_2}$.

(2 val.) (f) Determine o conjunto de soluções da equação linear $g(x,y,z) = 2 + t + t^2$.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val.) (a) Calcule $\det[2A^T A^{-2}]$.

(1 val.) (b) Calcule a entrada (3,2) de A^{-1}.

(3 val.) 4. Considere uma matriz $A \in M_{8\times 9}(\mathbb{R})$. Calcule, justificando, $\det(A^T A)$.