TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

SEGUNDO TESTE - VERSÃO A
6 DE DEZEMBRO DE 2022 - 18H
DURAÇÃO: 45 MINUTOS

LMAC E LEFT

(1) Seja V um espaço vetorial real com bases $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ e $B_2 = (v_1 + v_2, v_3, v_2)$, e W o espaço dos polinómios de grau ≤ 3 com a base $B_3 = (1, t, t^2, t^3)$. Seja $T\colon V \to W$ a transformação linear determinada por

$$T(v_1 + v_2) = t^2 + t, \quad T(v_2) = 2t - 1, \quad T(v_3) = -2t^2 - 1$$

(a) Determine a matriz de mudança de coordenadas $S_{B_2 \to B_1}$.
(b) Determine o primeiro vetor da base B_4 de V para a qual $S_{B_4 \to B_1} = (S_{B_2 \to B_1})^2$.
(c) Determine a matriz que representa a transformação linear $3T$ com respeito às bases B_1 e B_3.
(d) Determine a dimensão do núcleo e imagem de T.
(e) Existe alguma transformação linear $f\colon W \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \circ T$ seja um isomorfismo?
(f) Sendo $g\colon W \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $g(p) = p(1)$, determine o conjunto das soluções da equação linear $(g \circ T)(x) = 1$.

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -8 \\ -1 & 4 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\det A$.
(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{\det(xA)}{x^5}$.

(3) Mostre que se V é um espaço vetorial de dimensão n e $S \subset V$ é um conjunto de geradores com n elementos, então S é uma base de V.

(4) Sendo A uma matriz $n \times n$, seja $\tilde{A}$ a matriz que se obtém de A refletindo as entradas relativamente à diagonal que une as entradas $(n, 1)$ e $(1, n)$ (portanto a entrada (i, j) de $\tilde{A}$ é a entrada $(n + 1 - j, n + 1 - i)$ de A). Mostre que $\det \tilde{A} = \det A$.