Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEFT e LMAC

Teste 2 - 26 de Novembro de 2024 - 18h

Duração: 45 minutos

Teste 2

(2 val.) 1. Escreva a definição de transformação linear.

2. Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 3 e $T : \mathbb{R}^3 \to V$ a transformação linear definida por

$$T(1,1,0) = t^2 + t, \quad T(0,1,0) = 2t^2 + t^3, \quad T(1,0,1) = t^3 - t.$$

Considere a transformação linear $S : V \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$A_{S,B_2,B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases ordenadas

$$B_2 = (1, t, t^2, t^3) \text{ de } V \text{ e } B_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1)) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ (base canónica).}$$

(2 val.) (a) Determine a matriz A_{T,B_1,B_2} que representa a transformação T em relação à base $B_1 = ((1,1,0),(0,1,0),(1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base B_2 de V.

(3 val.) (b) Determine a dimensão do núcleo de T e uma base para a imagem de T. A transformação T é injectiva? E sobrejectiva? Justifique a sua resposta.

(1 val.) (c) Calcule $S(1 + t + t^3)$.

(3 val.) (d) Determine a matriz mudança de base $S_{B_{\mathbb{R}^3} \to B_1}$, onde $B_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Aproveite para calcular a matriz $A_{S \circ T, B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}}$, que representa a transformação $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(1 val.) (e) Escreva uma expressão para $S \circ T$.

(2 val.) (f) Determine o conjunto de soluções da equação linear $S(p(t)) = (1,2)$.

(3 val.) 3. Sabendo que $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & 1 \\ 1 & a+b & 2 \end{vmatrix} = 3$, calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 0 \\ b & ba + b^2 & 2b & 0 \\ ba & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det[2B^T B^{-1}] \end{vmatrix}.$$

(3 val.) 4. Mostre que qualquer matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é da forma $X = A^T - 2A$ para alguma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Sugestão: Mostre que $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^T - 2A$ é uma transformação linear.