

Álgebra Linear

LEBiom e LEBiol

Teste 1 - Versão B - 10 de Outubro de 2023 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 1

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Para cada parâmetro real β , considere o sistema linear cuja matriz aumentada é dada por

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\beta & -1 \\ 3 & \beta & -3\beta & \beta \\ \beta & -\beta & -1 & 1 \end{array} \right]$$

- (3 val.) (a) Determine em função de β quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.
- (3 val.) (b) Para $\beta = -1$, determine o conjunto das soluções do sistema.
- (1 val.) (c) Determine a característica de B para $\beta = -3$.

- (3 val.) 2. Sejam $C, D \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $DC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ que satisfaz a equação

$$C(X^T + I_3)D = I_3.$$

- (4 val.) 3. Mostre que o conjunto

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : c = 2a + b \right\}$$

é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e indique um conjunto gerador de U .

4. Seja V o espaço vetorial dos polinómios reais de grau ≤ 3 e seja $L(S) \subset V$ a expansão linear do conjunto

$$S = \{1 + x - x^3, 1 + x^3\}.$$

- (1 val.) (a) Determine se o vetor $p(x) = x$ pertence a $L(S)$.
- (2 val.) (b) Determine equações homogêneas que descrevam $L(S)$.

- (3 val.) 5. Sejam $C, D \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ matrizes não nulas. Determine a característica de $C^T D$. Justifique.