

## Álgebra Linear

LEFT e LMAC

Teste 1 - 8 de Outubro de 2024 - 18h

Duração: 45 minutos

### Teste 1

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Para cada parâmetro real  $\alpha$ , considere o sistema linear cuja matriz aumentada  $A_{4 \times 5}$  é dada por

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 - 1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

- (3 val.) (a) Determine em função de  $\alpha$  quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.
- (2 val.) (b) Para  $\alpha = 1$ , determine o conjunto das soluções do sistema.
- (1 val.) (c) Determine a característica de  $A$  para  $\alpha = -1$ .

- (1 val.) 2. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector  $(2, 1, 2)$  e cujo núcleo contém  $(1, 0, 0)$ ?

- (4 val.) 3. Sejam  $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  matrizes invertíveis tais que  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Determine a matriz  $X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  que satisfaz a equação

$$B((XC^{-1})^T - 3I_3) = 2A^{-1}.$$

- (3 val.) 4. Determine  $x \in \mathbb{R}$  tal que a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  não pertença a  $L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$ .

- (3 val.) 5. No espaço vetorial  $V$  dos polinómios reais de grau  $\leq 2$  considere o subconjunto

$$W_k = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V : a_2 = 2a_0 + k\}$$

onde  $k \in \mathbb{R}$ . Determine os valores de  $k$  para os quais  $W_k$  é um subespaço de  $V$ .

- (3 val.) 6. Seja  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Mostre que  $\text{car}(AB) = \text{car}(B)$ .