Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Teste 1 - 19 de Outubro de 2022 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 1

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema linear cuja matriz aumentada é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

(4 val.) (a) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

(3 val.) (b) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto das soluções do sistema.

(3 val.) 2. Determine a matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T (A - 2I_3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = I_3$$

(3 val.) 3. Sejam $B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ duas matrizes. Mostre que o conjunto

$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \, BAC = CAB\}$$

é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(4 val.) 4. Seja $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : \, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial real dos polinómios de grau ≤ 3. Considere os seguintes subespaços de V

$$U = \{p \in V : \, p(-1) = 0, \, p''(0) = 0\} \quad \text{e} \quad W = L(\{1 + t, t^2 - t, t^2 - t^3\}).$$

Determine uma base para $U \cap W$.

(3 val.) 5. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, v_3 \in V$ vetores linearmente independentes. Diga, justificadamente, se os vetores $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$ e $w_3 = v_2 + v_3$ são linearmente independentes.