Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Exame 1 - Versão A - 26 de Janeiro de 2023 - 18h

Resolução abreviada

Exame 1

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + z, 2y, 2y + 2z).$$

(2 val.) (a) Determine os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

(2 val.) (b) Determine uma forma canónica de Jordan para T, indicando a correspondente base de $\mathbb{R}^3$ para a qual T fica nessa forma canónica.

Resolução:

(a) A matriz que representa a transformação T na base canónica é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, que tem polinómio característico $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$, portanto os valores próprios são 1 e 2. Como o valor próprio 1 tem multiplicidade 1 como raiz do polinómio, podemos concluir que as multiplicidades algébrica e geométrica deste valor próprio são ambas iguais a 1.
O valor próprio 2 tem multiplicidade algébrica 2, pois é a multiplicidade como raiz do polinómio característico. Para determinar a sua multiplicidade geométrica temos de calcular a dimensão do seu espaço próprio $E(2)$, ou seja, a dimensão do núcleo da matriz $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Como esta matriz tem claramente característica 2, podemos concluir que a multiplicidade geométrica do valor próprio 2 é 1.

(b) Tendo em conta a alínea anterior podemos afirmar que uma forma canónica de Jordan para T é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para obter uma base correspondente a esta representação calculamos os espaços próprios associados aos valores próprios. Para $\lambda = 1$ temos

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

logo $E(1)=\{a(1,0,0): a\in\mathbb{R}\}$. Para $\lambda=2$ obtemos, calculando o núcleo da matriz $A-2I$, $E(2)=\{a(1,0,1): a\in\mathbb{R}\}$. Por outro lado o espaço próprio generalizado de 2 é dado pelo núcleo de

$$(A-2I)^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

ou seja, $E^g(2)=\{a(1,0,1)+b(0,1,2): a,b\in\mathbb{R}\}$. Podemos então escolher

$$v_3=(0,1,2),\quad v_2=(A-2I)v_3=(2,0,2)\quad \text{e}\quad v_1=(1,0,0),$$

e $B=(v_1,v_2,v_3)$ é uma base para a qual a representação de T nessa base é dada pela matriz J.

(2 val.) 2. Considere uma transformação linear $f: M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tem como espaços próprios

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)\quad \text{e}\quad L\left(\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}\right).$$

Diga, justificadamente, se a matriz $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ é um vetor próprio de f e se f é diagonalizável.

Resolução: A matriz $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ não é um vetor próprio de f, porque não pertence a nenhum dos espaços próprios de f: claramente não é múltiplo de $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, nem é uma combinação linear de $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

A transformação f não é diagonalizável, porque não existem vetores próprios linearmente independentes suficientes para gerar o espaço das matrizes $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: só temos 3 vetores próprios linearmente independentes e o espaço tem dimensão 4.

3. Considere o subespaço

$$V=\{a+bt+ct^2+dt^3: a=d,\, b+c=0\}$$

dos polinómios de grau ≤ 3 com o produto interno para o qual $\{1+t-t^2+t^3, t^2-t\}$ é uma base ortonormada.

(2 val.) (a) Calcule $\|1+t^3\|$.

(2 val.) (b) Determine a matriz da métrica (ou de Gram) deste produto interno com respeito à base $B=(1+t^3, t-t^2)$.

Resolução:

(a) Denotamos esta base ortonormada por B'. As coordenadas do vetor $1+t^3$ na base B' são fáceis de obter e são dadas por $(1,1)$, logo

$$\|1+t^3\|^2=\langle 1+t^3,1+t^3\rangle=[1+t^3]_{B'}^T\,G_{B'}\,[1+t^3]_{B'}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=2,$$

onde $G_{B'}$ é a matriz da métrica com respeito à base B', que é a identidade, porque esta base é ortonormada. Logo $\|1+t^3\| = \sqrt{2}$.

(b) A relação entre as matrizes das métricas com respeito às bases B e B' é dada pela fórmula

$$G_B = S^T\, G_{B'}\, S$$

onde $S = S_{B\to B'}$ é a matriz mudança de base, da base B para a base B'. Como já vimos o vetor $1+t^3$ tem coordenadas $(1,1)$ na base B', enquanto o vetor $t-t^2$ tem coordenadas $(0,-1)$ nesta base, logo $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Assim obtemos

$$G_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e o subespaço

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y+z-w = 0;\ x-y=0\}.$$

(2 val.) (a) Determine uma base ortogonal para U.

(2 val.) (b) Calcule a projeção ortogonal do vetor $(0,1,1,1)$ sobre U.

(1 val.) (c) Decomponha o vetor $(0,1,1,1)$ como a soma de um vetor de U e de outro em $U^\perp$.

Resolução:

(a) Começamos por escolher uma base qualquer para U, que é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2. Podemos escolher, por exemplo, $v_1 = (0,0,1,1)$ e $v_2 = (1,1,0,1)$. Claramente estes 2 vetores formam uma base de U. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos uma base ortogonal para U: definimos $w_1 = v_1$ e

$$w_2 = v_2 - \langle w_1, v_2\rangle \frac{w_1}{\|w_1\|^2} = (1,1,0,1) - \frac{1}{2}(0,0,1,1) = \left(1,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Então o conjunto

$$B = (w_1, w_2) = \left((0,0,1,1), \left(1,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

é uma base ortogonal de U.

(b) Usando a a base ortogonal obtida na alínea anterior e sabendo que $\|w_1\|^2 = 2$ e $\|w_2\|^2 = \frac{5}{2}$, segue que a projeção ortogonal de $v = (0,1,1,1)$ sobre U é dada por

$$P_U(v) = \langle w_1, v\rangle \frac{w_1}{\|w_1\|^2} + \langle w_2, v\rangle \frac{w_2}{\|w_2\|^2} = (0,0,1,1) + \frac{2}{5}\left(1,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$$

(c) Temos $v = P_U(v) + (v - P_U(v))$ onde $P_U(v) \in U$ foi calculado na alínea anterior e $v - P_U(v) \in U^\perp$, ou seja,

$$v = (0,1,1,1) = \left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right).$$

(2 val.) 5. Determine a decomposição polar da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução: Para obter a decomposição polar começamos por calcular $A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Segue do Teorema Espetral que existem matrizes S e D tal que $A^T A = SDS^{-1}$ onde S é uma matriz unitária (as colunas formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$) e D é uma matriz diagonal com os valores próprios (positivos) de $A^T A$ na diagonal. O polinómio característico de $A^T A$ é $p(\lambda) = (5 - \lambda)^2 - 16$ e tem raízes 1 e 9, logo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. As colunas de S são vetores próprios com norma 1 associados a estes valores próprios, portanto $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. De seguida definimos

$$P = S\sqrt{D}S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e $U = AP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A decomposição polar de A é então $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(3 val.) 6. Sejam $C, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ com C hermitiana tal que $C^3 B = BC^3$. Mostre que $CB = BC$.

Resolução: Uma vez que C é hermitiana, sabemos do Teorema Espetral que C é diagonalizável, ou seja, $C = SDS^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal com os valores próprios (reais) de C na diagonal e S é uma matriz unitária. Assim $C^3 = SD^3S^{-1}$ e

$$C^3 B = BC^3 \Leftrightarrow SD^3S^{-1}B = BSD^3S^{-1} \Leftrightarrow D^3S^{-1}BS = S^{-1}BSD^3$$

Seja $A = S^{-1}BS$. Temos $D^3 A = AD^3$, portanto a entrada ij destes produtos satisfaz $\lambda_i^3 a_{ij} = a_{ij}\lambda_j^3$. Se $a_{ij} = 0$ então claramente $\lambda_i a_{ij} = a_{ij}\lambda_j$ e se $a_{ij} \neq 0$ então $\lambda_i^3 = \lambda_j^3 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j$. Logo $\lambda_i a_{ij} = a_{ij}\lambda_j$ para todo o ij, ou seja, $DA = AD$. Concluimos que

$$DA = AD \Leftrightarrow DS^{-1}BS = S^{-1}BSD \Leftrightarrow SDS^{-1}B = BSDS^{-1} \Leftrightarrow CD = DC,$$

como queriamos provar.