Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

RESOLUÇÃO DO TERCEIRO TESTE - VERSÃO A
26 DE JANEIRO DE 2023

LMAC E LEFT

(1) Seja V o espaço vetorial dos polinómios reais e $T\colon V \to V$ o endomorfismo definido por

$$T(p(t)) = p(2)(t^2+5) - p'(2)(t^3-2t^2+t-2)$$

Verifique que o vetor t^3-2t^2+t-2 é um vetor próprio de T indicando o valor próprio correspondente.

Resolução: Para $p(t) = t^3-2t^2+t-2$ temos $p(2) = 8-8+2-2 = 0$ e $p'(t) = 3t^2-4t+1$ logo $p'(2) = 12-8+1 = 5$. Conclui-se que

$$T(t^3-2t^2+t-2) = 0 - 5(t^3-2t^2+t-2)$$

logo t^3-2t^2+t-2 é um vetor próprio associado ao valor próprio -5.

(2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y+z, 2y, -x+y+3z)$$

(a) Determine a forma canónica de Jordan de T assim como a base para $\mathbb{C}^3$ que coloca T em forma canónica de Jordan.

(b) Determine o maior subespaço $W \subset \mathbb{C}^3$ invariante por T tal que a restrição de T a W é diagonalizável.

Resolução:

(a) A matriz que representa T com respeito à base canónica é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ que tem polinómio característico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1) = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = -(\lambda-2)^3$$

logo 2 é o único valor próprio e tem multiplicidade algébrica 3. Os vetores próprios de 2 são os vetores não nulos no núcleo de

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $E(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \colon x = y+z\}$ e a multiplicidade geométrica de 2 é 2. A forma canónica de Jordan é portanto

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Numa base $B = (v_1, v_2, v_3)$ com respeito à qual T é representada pela matriz acima, v_1 e v_3 são vetores próprios de 2 e $(T - 2\,\mathrm{Id})v_2 = v_1$. O vetor v_1 deve portanto pertencer ao espaço das colunas da matriz acima que representa $(T - 2\,\mathrm{Id})$. Podemos por exemplo tomar $v_1 = (1,0,1)$ e então $v_2 = (0,1,0)$ é uma solução de $(T-2\,\mathrm{Id})v_2 = v_1$. Para v_3 podemos tomar qualquer vetor próprio de 2 independente de v_1, por exemplo $v_3 = (1,1,0)$. Conclui-se que uma base com respeito à qual a representação matricial de T é J é, por exemplo,

$$B = ((1,0,1),(0,1,0),(1,1,0))$$

(b) O maior subespaço invariante tal que a restrição de T a W é diagonalizável é o espaço próprio de 2, $W = E(2) = L(\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.

(3) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y-z=0, x-z+w=0\}$ e considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine uma base ortogonal para U.

(b) Sendo $B = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ com v_1 e v_2 os vetores que achou na alínea anterior, calcule a segunda coordenada de $(1,0,0,0)$ na base B.

(c) Explique como calcular (indique os cálculos a efetuar sem os levar até ao fim) a distância entre U e o conjunto $\{(x,y,z,w)\colon x+y-z=1, x-z+w=3\}$.

Resolução:

(a) O plano U é determinado pelas condições $z = x+y, w = z-x = y$ logo

$$U = \{(x,y,x+y,y)\colon x,y \in \mathbb{R}\}$$

Dado que $(x,y,x+y,y) = x(1,0,1,0)+y(0,1,1,1)$ podemos obter uma base ortogonal tomando $v_1 = (1,0,1,0)$ e

$$v_2 = (0,1,1,1) - \frac{\langle (1,0,1,0),(0,1,1,1)\rangle}{\|(1,0,1,0)|^2}(1,0,1,0) = (0,1,1,1) - \tfrac{1}{2}(1,0,1,0) = (-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},1)$$

(b) A segunda coordenada é dada pela expressão

$$\frac{\langle (-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1),(1,0,0,0)\rangle}{\|(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1)\|^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

(c) P é um plano paralelo a U logo, pelo Teorema de Pitágoras, a distância de P a U é a distância de um qualquer ponto de P à sua projeção ortogonal em U. Considerando o ponto $(1,0,0,2) \in P$ temos

$$\begin{aligned} P_U(1,0,0,2) &= \frac{\langle (1,0,1,0),(1,0,0,2)\rangle}{2}(1,0,1,0) + \frac{\langle((-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1),(1,0,0,2)}{\frac{5}{2}}(-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},1) \\ &= (\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0) + \tfrac{3}{5}(-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},1) = (\tfrac{1}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5}) \end{aligned}$$

logo a distância é

$$\|(1,0,0,2) - (\tfrac{1}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5})\| = \sqrt{\tfrac{16+9+16+49}{25}} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

(4) Indique justificando se a seguinte matriz é diagonalizável.

$$\begin{bmatrix} -i & 2+3i & 0 & i \\ -2+3i & 0 & -i & 1 \\ 0 & -i & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Resolução: Esta matriz é diagonalizável pelo Teorema espetral uma vez que é anti-hermitiana.

(5) Classifique a forma quadrática definida pela expressão

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Resolução: A matriz simétrica associada a esta forma quadrática é $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. O polinómio característico é $((2-\lambda)(1-\lambda)-1)\lambda = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)\lambda$. Os valores próprios são $\lambda = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}, 0$ logo esta forma quadrática é semi-definida positiva.

(6) Determine uma decomposição em valores singulares para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução: Temos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Os valores singulares de A são portanto $\sigma_1 = \sqrt{3}$ e $\sigma_2 = \sqrt{2}$. Note-se que a matriz $A^T A$ já é diagonal mas os valores próprios não estão por ordem decrescente. Temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $U_2 = U_2^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Temos

$$AU_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e para obter a matriz U_1 temos de completar as colunas da matriz anterior normalizadas a uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Um vetor perpendicular ao espaço das colunas de A é por exemplo $(-2, 1, 1)$ logo podemos tomar

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

e uma decomposição em valores singulares para A é por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T\colon V \to V$ um endomorfismo. Se a multiplicidade algébrica do valor próprio λ for 7 e as características de $(T-\lambda I)^2$ e $(T-\lambda I)^3$ forem iguais, quais são os valores possíveis para a multiplicidade geométrica de λ?

Resolução: Uma vez que a restrição de $(T-\lambda I)$ (e portanto das suas potências) aos espaços próprios generalizados $E^g(\mu)$ com $\mu \neq \lambda$ é um isomorfismo, a característica (ou equivalentemente a nulidade) de uma potência de $T-\lambda I$ é determinada pela restrição de $T-\lambda I$ ao espaço próprio generalizado $E^g(\lambda)$. Usando a forma canónica de Jordan vemos que a característica de $(T-\lambda I)^2$ é igual à de $(T-\lambda I)^3$ se e só $(T-\lambda I)^2 = 0$ em $E^g(\lambda)$, isto é, se todos os blocos de Jordan associados a λ têm no máximo comprimento 2 (se houvesse algum bloco de comprimento maior ou igual a 3 a característica de $(T-\lambda I)^2$ seria maior do que a de $(T-\lambda I)^3$).

Uma vez que a multiplicidade algébrica de λ é 7, isto significa que têm de haver pelo menos 4 blocos, logo a multiplicidade geométrica de λ é $4, 5, 6$ ou 7.

(8) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Mostre que um endomorfismo $T\colon V \to V$ é diagonalizável se e só se existe um produto interno em V com respeito ao qual T é auto-adjunto.
Resolução: Se T é auto-adjunta com respeito a algum produto interno em V então T é diagonalizável pelo Teorema espetral. Reciprocamente suponhamos que T é diagonalizável por uma base $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ com $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e seja $\langle , \rangle$ um produto interno em V tal que B é uma base ortonormada. Vejamos que T é auto-adjunta com respeito a este produto interno: dados $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ e $w = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \in V$ temos

$$\begin{aligned}
\langle Tv, w\rangle &= \langle \alpha_1\lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n v_n, \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n\rangle \\
&= \alpha_1\lambda_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n\beta_n \\
&= \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \lambda_1\beta_1 v_1 + \ldots + \lambda_n\beta_n v_n\rangle \\
&= \langle v, Tw\rangle
\end{aligned}$$