Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Teste 2 - Versão B - 6 de Dezembro de 2022 - 20h

Resolução abreviada

Teste 2

1. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, w) = (x + y + w, y + z, x + z + w).$$

(4 val.) (a) Determine bases para o núcleo e para a imagem de f.

Resolução: A matriz que representa a transformação f nas bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ é

$$A_{f,B_{can},B_{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Em coordenadas o núcleo da transformação corresponde ao núcleo da matriz e a imagem corresponde ao espaço das colunas. Aplicando o método de Gauss à matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde concluimos que

$$N(f) = \{(-w, 0, 0, w) : w \in \mathbb{R}\},$$

e portanto uma base para o núcleo é dada por

$$B_{N(f)} = \{(-1, 0, 0, 1)\}.$$

Uma base para imagem pode ser

$$B_{f(\mathbb{R}^4)} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

(1 val.) (b) Diga, justificadamente, se f é injetiva.

Resolução: Uma vez que $N(f) \neq \{0\}$ a transformação não é injetiva.

2. Seja U o espaço dos polinómios de grau ≤ 1 e $g : U \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$g(1) = (1, 0), \quad g(2 + t) = (1, 1).$$

Considere a transformação linear $h : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to U$ representada pela matriz

$$A_{h,B_{can},B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com respeito às base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B_{can} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$, e a base ordenada $B_2 = (1 - t, 1 + t)$ de U.

(2 val.) (a) Considere a base ordenada $B_1 = (1, 2 + t)$ de U. Determine a matriz mudança de base $S_{B_1 \to B_2}$.

Resolução: Uma vez que

$$1 = \frac{1}{2}(1 - t) + \frac{1}{2}(1 + t) \quad \text{e} \quad 2 + t = \frac{1}{2}(1 - t) + \frac{3}{2}(1 + t)$$

a matriz mudança de base é

$$S_{B_1 \to B_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2 val.) (b) Determine a matriz que representa g com respeito às base B_2 e a base canónica de $\mathbb{R}^2$, e diga, justificadamente, se g é um isomorfismo.

Resolução: Temos

$$g(1 - t) = 3g(1) - g(2 + t) = 3(1, 0) - (1, 1) = (2, -1),$$
$$g(1 + t) = g(2 + t) - g(1) = (1, 1) - (1, 0) = (0, 1).$$

Portanto a matriz que representa g é

$$A_{g,B_2,B_{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz é invertível podemos concluir que g é um isomorfismo.

(2 val.) (c) Calcule $h\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

Resolução: As coordenadas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ na base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são $(1, -1, 1, 0)$, portanto as coordenadas da imagem na base B_2 são obtidas fazendo o produto da matriz A_{h,B_{can},B_2} pelo vetor destas coordenadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$h\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2(1 - t) - (1 + t) = 1 - 3t.$$

(1 val.) (d) Determine a representação matricial de $g \circ h$ com respeito às bases canónicas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$.

Resolução: A representação matricial de $g \circ h$ é o produto das matrizes que representam g e h, respectivamente, ou seja,

$$A_{g,B_2,B_{can}}\, A_{h,B_{can},B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2 val.) (e) Determine o conjunto de soluções da equação linear $h(A) = 1-2t$, onde $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Resolução: As coordenadas de $1-2t$ na base B_2 são $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ pois

$$1 - 2t = \frac{3}{2}(1-t) - \frac{1}{2}(1+t)$$

logo para determinar as soluções da equação linear temos de resolver os sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1/2 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem solução imediata $a + c = \frac{3}{2}$ e $b + d = -\frac{1}{2}$, logo o conjunto de soluções é dado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - c & -\frac{1}{2} - d \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1.5 val.) (a) Calcule o determinante de B.

Resolução: Usando a expansão de Laplace em relação à terceira linha, obtemos

$$|B| = 2.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

(1.5 val.) (b) Calcule a entrada $(4,1)$ de B^{-1}.

Resolução: A entrada $(4,1)$ de B^{-1} é dada por

$$(B^{-1})_{41} = \frac{1}{\det B}((\mathrm{cof\,B})^{\mathrm{T}})_{41} = \frac{1}{\det \mathrm{B}}(\mathrm{cof\,B})_{14},$$

onde

$$(\mathrm{cof\,B})_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Logo

$$(B^{-1})_{41} = \frac{1}{4}.$$

(3 val.) 4. Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, com $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = n$. Mostre que $\operatorname{car}(AB) = n$.

Resolução: Suponhamos que A e B representam transformações lineares f e g, respectivamente. Então pelo Teorema da Característica-Nulidade temos

$$\dim N(A) + \dim EC(A) = n \quad \text{e} \quad \dim N(B) + \dim EC(B) = m$$

Uma vez que $\dim EC(A) = \operatorname{car} A = n$, concluimos que $\dim N(A) = 0$, ou seja, $N(A) = N(f) = \{0\}$, portanto f é injetiva, o que implica que o núcleo da composta $f \circ g$ coincide com o núcleo de g. Em coordenadas temos $N(AB) = N(B)$, pois o produto AB representa a função composta. Usando novamente o Teorema da Característica-Nulidade obtemos

$$\dim N(AB) + \dim EC(AB) = m,$$

logo

$$\begin{aligned}\operatorname{car} AB = \dim EC(AB) = m - \dim N(AB) = m - \dim N(B) =\\ = m - (m - \dim EC(B)) = \dim EC(B) = \operatorname{car} B = n.\end{aligned}$$