Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

RESOLUÇÃO DO SEGUNDO TESTE - VERSÃO A
6 DE DEZEMBRO DE 2022 LMAC E LEFT

(1) Seja V um espaço vetorial real com bases $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ e $B_2 = (v_1 + v_2, v_3, v_2)$, e W o espaço dos polinómios de grau ≤ 3 com a base $B_3 = (1, t, t^2, t^3)$. Seja $T\colon V \to W$ a transformação linear determinada por

$$T(v_1 + v_2) = t^2 + t, T(v_2) = 2t - 1, T(v_3) = -2t^2 - 1$$

(a) Determine a matriz de mudança de coordenadas $S_{B_2 \to B_1}$.
(b) Determine o primeiro vetor da base B_4 de V para a qual $S_{B_4 \to B_1} = (S_{B_2 \to B_1})^2$.
(c) Determine a matriz que representa a transformação linear $3T$ com respeito às bases B_1 e B_3.
(d) Determine a dimensão do núcleo e imagem de T.
(e) Existe alguma transformação linear $f\colon W \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \circ T$ seja um isomorfismo?
(f) Sendo $g\colon W \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $g(p) = p(1)$, determine o conjunto das soluções da equação linear $(g \circ T)(x) = 1$.

Resolução:

(a) A matriz de mudança de coordenadas é

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Uma vez que

$$S^2_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o primeiro vetor da base B_4 é $v_1 + v_2 + v_3$.

(c) Temos

$$T(v_1) = T(v_1 + v_2) - T(v_2) = t^2 + t - (2t - 1) = 1 - t + t^2$$

Logo

$$A_{T,B_1,B_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$A_{3T,B_1,B_3} = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Aplicando o método Gauss temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo a dimensão do núcleo de T é 1 (em coordenadas, corresponde ao número de variáveis livres no sistema homogéneo associado à representação matricial, ou seja ao número de colunas sem pivot) e portanto, pelo Teorema da característica-nulidade, a dimensão da imagem é

$$\dim T(V) = \dim(V) - \dim N(T) = 3 - 1 = 2$$

(e) Não, porque se $v \in V$ é um vetor não nulo no núcleo de T então para qualquer transformação f temos $f \circ T(v) = 0$ e portanto o núcleo de $f \circ T$ é não trivial. Assim, $f \circ T$ não é injetiva e portanto não é um isomorfismo.

(f) Com respeito às bases B_3 e a base canónica $B_5 = (1)$ em $\mathbb{R}$, dado que $g(1) = g(t) = g(t^2) = g(t^3) = 1$, a representação matricial de g é

$$A_{g,B_3,B_5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto a representação matricial de $g \circ T$ com respeito às bases B_1 e B_5 é

$$A_{g,B_3,B_5} A_{T,B_1,B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Em coordenadas a equação linear é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + y - 3z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y + 3z$$

Portanto o conjunto das soluções é

$$\{(1 - y + 3z)v_1 + yv_2 + zv_3 \colon y, z \in \mathbb{R}\} = v_1 + L(\{-v_1 + v_2, 3v_1 + v_3\})$$

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -8 \\ -1 & 4 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\det A$.
(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{\det(xA)}{x^5}$.

Resolução:

(a) Aplicando a regra de Laplace ao longo da terceira linha obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+3}3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(1+7)(-4+3) = 24 \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usámos o facto de a matriz ser triangular por blocos.

(b) Pela multilinearidade do determinante temos $\det(xA) = x^5 \det(A)$ logo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\det(xA)}{x^5} = \lim_{x \to +\infty} \det(A) = \det(A) = 24$$

(3) Mostre que se V é um espaço vetorial de dimensão n e $S \subset V$ é um conjunto de geradores com n elementos, então S é uma base de V.
Resolução: Como V é finitamente gerado, qualquer conjunto de geradores contém uma base de V. Uma vez que todas as bases de V têm n elementos, uma base contida em S necessariamente coincide com S, logo S é uma base.

(4) Sendo A uma matriz $n \times n$, seja $\tilde{A}$ a matriz que se obtém de A refletindo as entradas relativamente à diagonal que une as entradas $(n, 1)$ e $(1, n)$ (portanto a entrada (i, j) de $\tilde{A}$ é a entrada $(n + 1 - j, n + 1 - i)$ de A). Mostre que $\det \tilde{A} = \det A$.
Resolução: Temos

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdots \tilde{a}_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \tag{1}$$

com

$$\tilde{a}_{i\sigma(i)} = a_{n+1-\sigma(i),n+1-i}$$

Fazendo $j = n + 1 - \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma(i) = n + 1 - j \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(n + 1 - j)$ e reorganizando os fatores de cada termo em (1) de forma a ficarem ordenados por linha obtemos

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j(n+1-\sigma^{-1}(n+1-j))}$$

ou, escrevendo ρ para a permutação definida por $\rho(i) = n + 1 - i$,

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j(\rho\circ\sigma\circ\rho)(j)}$$

A composição com ρ permuta o conjunto Σ_n logo a soma anterior pode equivalentemente ser indexada pela permutação $\mu = \rho \circ \sigma \circ \rho$. Resta portanto apenas ver que $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\mu) = \operatorname{sgn}(\rho \circ \sigma \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. Isto é uma consequência de o sinal de uma permutação σ ser o determinante da matriz de permutação $A(\sigma)$ associada a σ e de

$$A(\rho \circ \sigma \circ \rho) = A(\rho)A(\sigma)A(\rho)$$

pelo que

$$\det A(\rho \circ \sigma \circ \rho) = \det A(\rho) \det A(\sigma) \det A(\rho) = \det A(\sigma)(\pm 1)^2 = \det A(\sigma)$$