Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom e LEBiol

Teste 1 - Versão B - 10 de Outubro de 2023 - 20h

Duração: 45 minutos

Teste 1

Resolução abreviada

1. Para cada parâmetro real β, considere o sistema linear cuja matriz aumentada é dada por

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\beta & | & -1 \\ 3 & \beta & -3\beta & | & \beta \\ \beta & -\beta & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

(3 val.) (a) Determine em função de β quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

Resolução: Começamos por aplicar o método de Gauss à matriz B:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\beta & | & -1 \\ 3 & \beta & -3\beta & | & \beta \\ \beta & -\beta & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2-3L_1 \\ L_3-\beta L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\beta & | & -1 \\ 0 & \beta+3 & 0 & | & \beta+3 \\ 0 & 0 & \beta^2-1 & | & 1+\beta \end{bmatrix}$$

Assim, podemos concluir que o sistema é impossível se $\beta = 1$. Se $\beta = -1$ ou $\beta = -3$ o sistema é possível e indeterminado e para $\beta \neq \pm 1$ e $\beta \neq -3$ o sistema é possível e determinado.

(3 val.) (b) Para $\beta = -1$, determine o conjunto das soluções do sistema.

Resolução: Se $\beta = -1$ ficamos com a seguinte matriz aumentada (depois do método de Gauss)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

portanto o conjunto de soluções é dado por

$$\{(-z, 1, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

(1 val.) (c) Determine a característica de B para $\beta = -3$.

Resolução: Se $\beta = -3$ ficamos com a seguinte matriz aumentada (depois do método de Gauss)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 8 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

que claramente tem 2 pivots, por isso podemos concluir que a característica de B é 2.

(3 val.) 2. Sejam $C, D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $DC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que satisfaz a equação

$$C(X^T + I_3)D = I_3.$$

Resolução: Sabendo que C e D são invertíveis podemos resolver a equação matricial em ordem a X

$$X^T + I_3 = C^{-1}D^{-1} \Leftrightarrow X^T + I_3 = (DC)^{-1} \Leftrightarrow X = ((DC)^{-1} - I_3)^T$$

Calculamos a inversa da matriz DC usando o método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Finalmente obtemos

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(4 val.) 3. Mostre que o conjunto

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c = 2a + b \right\}$$

é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e indique um conjunto gerador de U.

Resolução: O conjunto U é não vazio porque a matriz nula pertence a U, ou seja, $0 \in U$. De seguida verificamos que U é fechado para a soma e multiplicação por escalar. Sejam $A_1, A_2 \in U$, ou seja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

tais que $c_1 = 2a_1 + b_1$ e $c_2 = 2a_2 + b_2$. Então temos

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

com

$$c_1 + c_2 = 2a_1 + b_1 + 2a_2 + b_2 = 2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$$

o que mostra que $A_1 + A_2 \in U$ e U é fechado para a soma. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in U$ então

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a \\ \alpha b & \alpha c \end{bmatrix}$$

com $\alpha c = \alpha(2a + b) = 2\alpha a + \alpha b$ portanto $\alpha A \in U$ e U é fechado para a multiplicação por escalar. Concluimos que U é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Para obter um conjunto gerador notamos que

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 2a+b \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

portanto um conjunto gerador é

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

pois os vetores de U são combinações lineares dos elementos de S.

4. Seja V o espaço vetorial dos polinómios reais de grau ≤ 3 e seja $L(S) \subset V$ a expansão linear do conjunto

$$S = \{1 + x - x^3, 1 + x^3\}.$$

(1 val.) (a) Determine se o vetor $p(x) = x$ pertence a $L(S)$.

Resolução: Temos de verificar se x é a combinação linear dos elementos de S, ou seja, se existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $x = \alpha(1 + x - x^3) + \beta(1 + x^3)$. Obtemos um sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

É óbvio que este sistema é impossível, por isso concluimos que $x \notin L(S)$.

(2 val.) (b) Determine equações homogéneas que descrevam $L(S)$.

Resolução: Os vetores que pertencem a $L(S)$ são os polinómios $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ para os quais existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = \alpha(1 + x - x^3) + \beta(1 + x^3),$$

ou seja, para os quais o seguinte sistema é possível.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ -1 & 1 & d \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d+2b-a \end{array}\right]$$

Concluimos que

$$L(S) = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : c = 0 \text{ e } a = 2b + d,\ b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3 val.) 5. Sejam $C, D \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ matrizes não nulas. Determine a característica de $C^T D$. Justifique.

Resolução: A matriz $C^T D$ tem dimensão $n \times n$ e todas as linhas são múltiplos da linha da matriz D, ou seja, são da forma $c_i D$, onde c_i com $1 \leq c_i \leq n$, são as entradas da matriz C. Logo a caraterística de $C^T D$ é ≤ 1. Uma vez que C, D são não nulas existe pelo menos uma linha $c_i D$ não nula. Logo a característica é igual a 1.