Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

RESOLUÇÃO TESTE DE 19/10/2022

LMAC E LEFT

(1) Considere o sistema linear cuja matriz aumentada é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -\alpha & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1 & -1 & -\alpha & 0 \end{array}\right]$$

(a) Determine em função de α se o sistema é impossível, possível determinado ou indeterminado, indicando ainda a característica da matriz $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ em função de α.

(b) Determine o conjunto das soluções do sistema para $\alpha = 2$.

Resolução:

(a) Aplicando as operações elementares indicadas obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\alpha & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1 & -1 & -\alpha & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha \\ -\alpha & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3+\alpha L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 1+\alpha \end{array}\right]$$

Assim, se $\alpha = 1$, o sistema é impossível (a última equação é impossível); se $\alpha = -1$ então o sistema é possível e indeterminado (há pivots na primeira e segunda colunas); para $\alpha \neq \pm 1$ o sistema é possível e determinado (há um pivot em cada uma das primeiras três colunas).
A característica é 2 se $\alpha = \pm 1$ e 3 se $\alpha \neq \pm 1$.

(b) Substituindo $\alpha = 2$ no último sistema acima temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

que tem solução $z = -1$, $y = 1$ e $x = y + 2z = -1$. O conjunto das soluções é portanto $\{(-1, 1, -1)\}$.

(2) Determine, se existirem, as matrizes A que satisfazem *ambas* as seguintes equações

$$\begin{cases} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} A^3 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Resolução: Substituindo a primeira equação na segunda obtemos

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}A\right)\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}-2A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

que é equivalente a

$$A\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}-A\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow A\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

logo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -6\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 1 & 3 & -9\\ 0 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

Uma vez que esta matriz não satisfaz a primeira equação do sistema dado, concluímos que não existe nenhuma matriz que seja solução do sistema.

(3) Considere o conjunto de vetores $S=\{(-2,1,-2,1),(1,1,0,-1),(1,4,-2,-2)\}\subset\mathbb{R}^4$
 (a) Determine se o conjunto S é linearmente dependente.
 (b) Determine um conjunto de equações cartesianas que definam $L(S)$ como subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Consideramos a equação

$$\alpha(-2,1,-2,1)+\beta(1,1,0,-1)+\gamma(1,4,-2,-2)=(0,0,0,0)$$

que é equivalente ao sistema linear homogéneo

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Conclui-se que o sistema é indeterminado pelo que o conjunto S é linearmente dependente.

(b) Um vetor (x,y,z,w) pertence a $L(S)$ se e só se o sistema linear não homogéneo determinado pela equação

$$\alpha(-2,1,-2,1)+\beta(1,1,0,-1)+\gamma(1,4,-2,-2)=(x,y,z,w)$$

tem solução. Temos

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & x \\ 1 & 1 & 4 & | & y \\ -2 & 0 & -2 & | & z \\ 1 & -1 & -2 & | & w \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & | & y \\ -2 & 1 & 1 & | & x \\ -2 & 0 & -2 & | & z \\ 1 & -1 & -2 & | & w \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & | & y \\ 0 & 3 & 9 & | & x+2y \\ 0 & 2 & 6 & | & z+2y \\ 0 & -2 & -6 & | & w-y \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & | & y \\ 0 & 3 & 9 & | & x+2y \\ 0 & 0 & 0 & | & z+2y-\frac{2}{3}(x+2y) \\ 0 & 0 & 0 & | & w-y+\frac{2}{3}(x+2y) \end{bmatrix}$$

Conclui-se que $L(S)$ é definido pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} -2x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3w=0 \end{cases}$$

(4) Seja V um espaço vetorial e $W_1, W_2 \subset V$ dois subespaços vetoriais. Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V se e só se $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

Resolução: Suponhamos primeiro que $W_1 \subset W_2$. Então $W_1 \cup W_2 = W_2$ é um subespaço vetorial. Analogamente, se $W_2 \subset W_1$ então $W_1 \cup W_2 = W_1$ é um subespaço vetorial.

Sejam agora W_1, W_2 subespaços vetoriais de V tais que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V e suponhamos por absurdo que $W_1 \not\subset W_2$ e $W_2 \not\subset W_1$. Então podemos escolher $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Uma vez que $W_1 \cup W_2$ é fechado para a soma temos $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ e portanto $w_1 + w_2 \in W_1$ ou $w_1 + w_2 \in W_2$.

Se $w_1 + w_2 \in W_1$ temos $w_2 = (w_1 + w_2) - w_1 \in W_1$ (é uma diferença de vetores de W_1), o que é uma contradição. Analogamente se $w_1 + w_2 \in W_2$ obtemos a contradição $(w_1 + w_2) - w_2 = w_1 \in W_2$.

Conclui-se que $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$ conforme queríamos demonstrar.