# ÁLGEBRA LINEAR

## RESOLUÇÃO DO PRIMEIRO TESTE - 10/10/2023

## LMAC, LEFT

(1) Sejam $\alpha, \beta$ parâmetros reais e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & 0 & \beta \\ -1 & \beta & \alpha+1 & 1 & -\beta \\ 1 & -\beta & -1-\alpha & \alpha^2-\alpha-1 & 2\beta \end{bmatrix}$$

(a) Determine a característica de $A$ em função de $\alpha$ e $\beta$.
(b) Determine o conjunto dos valores de $\alpha$ e $\beta$ para os quais o sistema não homogéneo associado a $A$ (que tem 3 equações e 4 incógnitas) é possível.
(c) Para $\alpha = 1, \beta = 0$ determine um conjunto de três geradores para o núcleo de $A$.

**Resolução:**

(a) Aplicando o método de Gauss à matriz obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & 0 & \beta \\ -1 & \beta & \alpha+1 & 1 & -\beta \\ 1 & -\beta & -1-\alpha & \alpha^2-\alpha-1 & 2\beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta+\alpha & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta & -\alpha & \alpha^2-\alpha-1 & \beta \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta+\alpha & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

A característica da matriz é pelo menos 2 uma vez que a segunda linha irá sempre ter um pivot (na segunda, terceira ou quarta coluna). A característica será dois apenas quando a última linha se anular, o que acontece quando $\alpha^2 - \alpha = \beta = 0$. Conclui-se que

$$\operatorname{car}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } (\alpha,\beta) = (0,0) \text{ ou } (\alpha,\beta) = (1,0) \\ 3 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) O sistema será impossível se e só se houver um pivot na última coluna. A matriz está em escada de linhas para quaisquer valores do parâmetro (pois se $\beta + \alpha$ e $\alpha$ forem zero a entrada 34 da matriz anula-se) e é portanto claro que há um pivot na última coluna se e só se $\alpha^2 - \alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Conclui-se que o sistema é possível se $\alpha \notin \{0, 1\}$ ou $\beta = 0$.

(c) O núcleo de $A$ coincide com o núcleo da matriz obtida no final do método de Gauss acima, que é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo o núcleo é definido pelas equações

$$\begin{cases} x = -(-z-u) + z = u + 2z \\ y = -z - u \end{cases}$$

Ou seja,

$$N(A) = \{(u + 2z, -z - u, z, u, w) \colon z, u, w \in \mathbb{R}\}$$

Como

$$(u + 2z, -z - u, z, u, w) = u(1, -1, 0, 1, 0) + z(2, -1, 1, 0, 0) + w(0, 0, 0, 0, 1)$$

vemos que $N(A) = L(\{(1, -1, 0, 1, 0), (2, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\})$ sendo portanto $\{(1, -1, 0, 1, 0), (2, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ um conjunto de três geradores para $N(A)$.

(2) Um sistema linear de $n$ equações com $n$ incógnitas pode ter exatamente duas soluções?
**Resolução:** Não. Seja $A$ a matriz $n \times n$ dos coeficientes do sistema. Se a característica desta matriz for $n$, o sistema tem apenas uma solução. Se a característica de $A$ for menor do que $n$ então, ou o sistema é impossível (o que só pode acontecer no caso não homogéneo), ou tem infinitas soluções uma vez que pelo menos uma das variáveis fica livre. Vemos assim que o número possível de soluções para um tal sistema é $0, 1$ ou $\infty$.

(3) Seja $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine a entrada 23 (linha 2, coluna 3) de $A^{-1}$.
**Resolução:** Como

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a matriz do lado esquerdo é a terceira coluna da matriz $A^{-1}$ pelo que a entrada 23 é $-1$.

(4) Resolva a seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left( 3A - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

**Resolução:** Multiplicando a equação à esquerda pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e notando que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

obtemos a equação equivalente

$$3A - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \right)$$

Usamos o método de Gauss-Jordan para achar a inversa requerida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

e concluimos que

$$A = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

(5) Seja $V$ um espaço vetorial real e $x$ um vetor não nulo de $V$. Indique justificadamente em que condições o subconjunto

$$W = V \setminus \{\alpha x \colon \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0\}$$

é um subespaço vetorial de $V$.

**Resolução:** $W$ é um subespaço vetorial se e só se $V = L(\{x\})$.

De facto, neste caso temos $W = \{0x\} = \{0\}$ (uma vez que $\alpha x \neq 0$ para $\alpha \neq 0$) logo $W$ é um subespaço.

Se, por outro lado, existe $y \in W$ tal que $y \notin L(\{x\})$ então ou $-y = (-1)y \notin W$ e então $W$ não é fechado para o produto por escalar, ou, se $-y \in W$, então $W$ não é fechado para a soma: de facto, $y + x$ tem de pertencer a $W$ senão $y + x = \alpha x$ para algum $\alpha$ e portanto $y = (\alpha - 1)x \in L(\{x\})$ contrariando a hipótese sobre $y$. Uma vez que

$$1x = x = -y + (y + x) \notin W$$

vemos que $W$ não é fechado para a soma. Conclui-se que se $V \neq L(\{x\})$ então $W$ não é um subespaço vetorial.