Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEFT e LMAC

Teste 1 - 8 de Outubro de 2024 - 18h

Duração: 45 minutos

Teste 1

Resolução abreviada

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema linear cuja matriz aumentada $A_{4\times 5}$ é dada por

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2-1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

(3 val.) (a) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

Resolução: Começamos por aplicar o método de Gauss à matriz A:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2-1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ {\scriptstyle L_2-L_1} \\ {\scriptstyle L_1+L_3} \\ {\scriptstyle L_4-2L_1} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2-1 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & -1 & \alpha^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1-2\alpha^2 \end{array}\right]$$

Assim, podemos concluir que o sistema é impossível se $\alpha = -1$. Se $\alpha = 1$ o sistema é possível e indeterminado e para $\alpha \neq \pm 1$ o sistema é possível e determinado.

(2 val.) (b) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto das soluções do sistema.

Resolução: Se $\alpha = 1$ ficamos com a seguinte matriz aumentada (após o método de Gauss)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

portanto o conjunto de soluções é dado por

$$\left\{ \left(\frac{7}{4}, y, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right) : y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1 val.) (c) Determine a característica de A para $\alpha = -1$.

Resolução: Se $\alpha = -1$ ficamos com a seguinte matriz aumentada (após o método de Gauss)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz tem 3 pivots, na 1ª, 4ª e 5ª colunas (1, -2 e -1, respectivamente), por isso a característica da matriz A é 3.

(1 val.) 2. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(2, 1, 2)$ e cujo núcleo contém $(1, 0, 0)$?

Resolução: Não. Se o vector $(2, 1, 2)$ pertence ao espaço das linhas da matriz então no sistema homogéneo associado à matriz temos a equação $2x + y + 2z = 0$. Sendo o núcleo da matriz o conjunto de soluções do sistema homogéneo, então o vector $(1, 0, 0)$ tem de satisfazer esta equação, o que claramente não se verifica.

(4 val.) 3. Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine a matriz $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que satisfaz a equação

$$B((XC^{-1})^T - 3I_3) = 2A^{-1}.$$

Resolução: Começamos por resolver a equação matricial em ordem a X:

$$\begin{aligned} & B((XC^{-1})^T - 3I_3) = 2A^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}B((XC^{-1})^T - 3I_3) = 2B^{-1}A^{-1} \Leftrightarrow \\ & (XC^{-1})^T - 3I_3 = 2(AB)^{-1} \Leftrightarrow (XC^{-1})^T = 3I_3 + 2(AB)^{-1} \Leftrightarrow \\ & XC^{-1} = (3I_3 + 2(AB)^{-1})^T \Leftrightarrow XC^{-1}C = (3I_3 + 2(AB)^{-1})^T C \end{aligned}$$

Portanto obtemos $X = (3I_3 + 2(AB)^{-1})^T C$. A inversa de AB obtém-se aplicando o método de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Logo

$$X = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^T C = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 4. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **não** pertença a $L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$.

Resolução: As matrizes que pertencem à expansão linear são todas as matrizes 2×2 que se podem obter como combinação linear daquelas 3 matrizes, ou seja, são as matrizes

$$a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+2c \\ a+b & b-c \end{bmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Comparando com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ vemos que esta matriz pertence à expansão linear se

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + 2c = x \\ a + b = 2 \\ b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x = 5 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Portanto é suficiente escolher $x \neq 5$ para que a matriz não pertença à expansão linear.

(3 val.) 5. No espaço vetorial V dos polinómios reais de grau ≤ 2 considere o subconjunto

$$W_k = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V \; : \; a_2 = 2a_0 + k\}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Determine os valores de k para os quais W_k é um subespaço de V.

Resolução: Para o conjunto W_k ser um subespaço tem de ser não vazio, em particular, tem de conter o elemento neutro que é o polinómio nulo, ou seja, o polinómio em que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. A equação $a_2 = 2a_0 + k$ implica de imediato que $k = 0$, ou seja, apenas W_0 poderá ser subespaço. De seguida verificamos que W_0 é fechado para a soma e multiplicação por escalar. Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ pertencem a W_0 (ou seja, $a_2 = 2a_0$ e $b_2 = 2b_0$) então

$$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

onde os coeficientes satisfazem

$$a_2 + b_2 = 2a_0 + 2b_0 = 2(a_0 + b_0).$$

Logo $p(x) + q(x) \in W_0$ e W_0 é fechado para a soma. Por outro lado, se $\alpha \in \mathbb{R}$ então os coeficientes do polinómio $\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2$ satisfazem $\alpha a_2 = \alpha 2a_0 = 2(\alpha a_0)$, logo $\alpha p(x) \in W_0$ e W_0 é fechado para o produto por escalar. Concluimos que W_0 é um subespaço vetorial de V. Para $k \neq 0$ o conjunto W_k não é um subespaço.

(3 val.) 6. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Mostre que $\operatorname{car}(AB) = \operatorname{car}(B)$.

Resolução: Começamos por notar que as operações elementares do método de Gauss e Gauss-Jordan não alteram a característica de uma matriz. Vamos mostrar que podemos transformar a matriz AB em B usando operações elementares. Por outro lado, as operações elementares na matriz AB podem ser obtidas multiplicando por matrizes elementares à esquerda de AB. Uma vez que A é invertível podemos multiplicar por matrizes elementares até obter a identidade, ou seja, existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_n$ tais que $E_n \ldots E_1 A = I$, logo

$$E_n \ldots E_1 AB = IB = B.$$

Podemos então concluir que a característica de AB e a característica de B são iguais.