Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Teste 1 - 19 de Outubro de 2022 - 20h

Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

Teste 1

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema linear cuja matriz aumentada é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ \alpha & 1 & 3 & | & -1 \\ -1 & 1 & \alpha^2 & | & \alpha \\ 2 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix}$$

(4 val.) (a) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

Resolução: Começamos por aplicar o método de Gauss à matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ \alpha & 1 & 3 & | & -1 \\ -1 & 1 & \alpha^2 & | & \alpha \\ 2 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2-\alpha L_1 \\ L_1+\alpha L_3 \\ L_4-2\alpha L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1+\alpha & 3+\alpha & | & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & | & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos concluir que o sistema é impossível se $\alpha = -1$. Se $\alpha = 1$ o sistema é possível e indeterminado e para $\alpha \neq \pm 1$ o sistema é possível e determinado.

(3 val.) (b) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto das soluções do sistema.

Resolução: Se $\alpha = 1$ ficamos com a seguinte matriz aumentada (depois do método de Gauss)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

portanto o conjunto de soluções é dado por

$$\{(-z-1, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

(3 val.) 2. Determine a matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T (A - 2I_3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = I_3$$

Resolução: Notamos que a equação é dada por

$$B^T(A - 2I_3)C^{-1} = I_3$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assumindo que B^T é invertível e resolvendo em ordem a A, obtemos

$$A = 2I_3 + (B^T)^{-1}C.$$

Começamos por verificar que B^T é invertível aplicando o método de Gauss e aproveitamos o cálculo para de seguida obter a matriz inversa de B^T.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Finalmente multiplicando por C à direita e somando $2I_3$ obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 3. Sejam $B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ duas matrizes. Mostre que o conjunto

$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : BAC = CAB\}$$

é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Resolução: O conjunto W é não vazio porque a matriz nula pertence a W, ou seja, $0 \in W$. De seguida verificamos que W é fechado para a soma e multiplicação por escalar. Sejam $A, D \in W$. Temos

$$B(A + D)C = (BA + BD)C = BAC + BDC = CAB + CDB = C(A + D)B,$$

logo $A + D \in W$ e W é fechado para a soma. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in W$ então

$$B(\alpha A)C = \alpha(BAC) = \alpha(CAB) = C(\alpha A)B,$$

portanto $\alpha A \in W$ e W é fechado para a multiplicação por escalar. Concluimos que W é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(4 val.) 4. Seja $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial real dos polinómios de grau ≤ 3. Considere os seguintes subespaços de V

$$U = \{p \in V : p(-1) = 0,\, p''(0) = 0\} \quad \text{e} \quad W = L(\{1+t, t^2 - t, t^2 - t^3\}).$$

Determine uma base para $U \cap W$.

Resolução: Começamos por determinar as equações homogéneas que descrevem o subespaço U. Se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ então

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \quad \text{e} \quad p''(0) = 2a_2 = 0.$$

Logo

$$U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_0 - a_1 - a_3 = 0,\, a_2 = 0\}.$$

Por outro lado

$$W = \{\ p(t) \in V : p(t) = \alpha_1(1+t) + \alpha_2(t^2 - t) + \alpha_3(t^2 - t^3),\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Assim $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in W$ se o seguinte sistema é possível

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a_0 \\ 1 & -1 & 0 & | & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & a_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a_0 \\ 0 & -1 & 0 & | & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 1 & | & a_1 - a_0 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & a_1 - a_0 + a_2 + a_3 \end{bmatrix}$$

Donde se conclui que $W = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_1 - a_0 + a_2 + a_3 = 0\}$, logo

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_0 - a_1 - a_3 = 0,\, a_2 = 0,\, a_1 - a_0 + a_2 + a_3 = 0\} \\ &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_1(1+t) + a_3(1+t^3),\, a_1, a_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Concluimos que uma base para $U \cap W$ é dada por $B = \{1+t, 1+t^3\}$.

(3 val.) 5. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, v_3 \in V$ vetores linearmente independentes. Diga, justificadamente, se os vetores $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$ e $w_3 = v_2 + v_3$ são linearmente independentes.

Resolução: Os vetores w_i são distintos uma vez que os vetores v_i são distintos. De facto, por exemplo,

$$w_1 = w_2 \Rightarrow v_1 + v_2 = v_1 + v_3 \Rightarrow (-v_1) + v_1 + v_2 = (-v_1) + v_1 + v_3 \Rightarrow 0 + v_2 = 0 + v_3,$$

logo $v_2 = v_3$. Com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ consideramos a equação

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0 &\Longleftrightarrow \alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0 \end{aligned}$$

Como os vetores v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes obtem-se

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, e portanto os vetores w_1, w_2, w_3 são linearmente independentes.