ÁLGEBRA LINEAR

EXAME/ TESTE DE RECUPERAÇÃO - 18/01/2024
DURAÇÃO: 2H/ 40M

LMAC, LEFT

Primeiro Teste

(1) Considere a matriz 3×4 correspondente a um sistema não homogéneo de três equações a três incógnitas dependente dos dois parâmetros reais a, b:

$$\begin{bmatrix} a & a+b & 1 & | & b \\ a & 1+b & ab & | & 2+b \\ a^2 & a^2+ab & a^2 & | & (a+1)b \end{bmatrix}$$

(5 val.) Classifique em função de a, b o sistema correspondente como impossível, possível determinado ou possível indeterminado.
Nota: A sua resposta deve tomar a forma: O sistema é impossível se "condição lógica sobre os parâmetros", possível determinado se "outra condição", etc... Não use "caso contrário", escreva a condição.

(4 val.) (2) Sendo $A \in M_{3\times3}(R)$ uma matriz invertível, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ calcule

$$A(C + 2A^{-1}B^{-1}A - 3I_3)A^{-1} - A(CA^T)(A^{-1})^T A^{-1}$$

(4 val.) (3) Mostre que $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ tem derivada contínua.}\}$ é um subespaço vetorial do espaço das funções reais de variável real.

(4 val.) (4) Determine uma base para o subespaço $U \cap V$ de $\mathbb{R}^4$ onde

$$U = L(\{(1,0,1,-1), (1,1,-1,0), (2,1,0,-1)\})$$

$$V = L(\{(1,-1,0,1), (0,1,0,0), (1,0,1,1)\})$$

(3 val.) (5) Mostre ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: Seja V um espaço vetorial e $S, T \subset V$. Se S, T são linearmente independentes e $L(S) \cap L(T) = \{0\}$ então $S \cup T$ é linearmente independente.

Segundo Teste

(2 val.) (6) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine $\det(2A^2A^TA^{-1}A^3)$.

(2 val.) (7) Considere o conjunto de vetores $\{(1,-1,0,2,1),(-1,2,1,0,3),(3,-4,-1,4,-1)\} \subset \mathbb{R}^5$. Qual é o número mínimo de vetores que é preciso adicionar a este conjunto para obter um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^5$? Justifique.

(8) Sejam V o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 e considere as seguintes bases ordenadas $B_1 = (1-t, 1+t, t+t^2)$ e $B_c = (1, t, t^2)$ para V e a base

$$B_{can} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere as transformações lineares $T\colon V \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $g\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to V$ definidas por

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p'(0) \end{bmatrix}$$

e

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1-t \qquad g\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = t+t^2 \qquad g\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1-t^2 \qquad g\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1+t$$

(3 val.) (a) Determine $S_{B_c \to B_1}$.

(3 val.) (b) Determine $A_{T,B_1,B_{can}}$.

(3 val.) (c) Determine uma representação matricial à sua escolha para a transformação linear $g \circ T \circ g - 2g$.

(2 val.) (d) Resolva a equação linear $g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1-t$.

(2 val.) (9) Seja A uma matriz 3×3 com determinante 7 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine o cofator 13 de A.

(3 val.) (10) Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Mostre que a aplicação

$$V \xrightarrow{\phi} L(L(V,\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

definida por

$$(\phi(v))(T) = T(v)$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Terceiro Teste

(3 val.) (11) Determine se o subespaço $W = \{(x,y,z)\colon x+y+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$ é invariante para o endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (2x+y+4z, 3x+2y+2z, 2y-z)$$

(12) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4 val.) (a) Determine os valores próprios indicando a sua multiplicidade geométrica e algébrica.

(3 val.) (b) Determine a forma canónica de Jordan J de A e uma matriz invertível S tal qie $A = SJS^{-1}$.

(4 val.) (13) Seja V um espaço vetorial real com base $B = (v_1, v_2, v_3)$ e com um produto interno cuja matriz da métrica é

$$G_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule a distância em V entre o vetor $v_1 + v_2$ e o subespaço $U = L(\{v_1 - v_2, v_3\})$.

(3 val.) (14) Classifique a forma quadrática $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2yz - 2yw - 6zw$$

(3 val.) (15) Seja V um espaço vetorial real com produto interno, $v \in V$ e $U \subset V$ um subespaço finitamente gerado. Seja $X = \{u \in U : \|u\| \leq 1\}$ e considere a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = \langle v, u \rangle$$

Mostre que o máximo de f é $\|P_U(v)\|$ (onde $P_U\colon V \to V$ denota a projeção ortogonal sobre U).