Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR

EXAME
10 DE FEVEREIRO DE 2023
DURAÇÃO: 120 MINUTOS

LMAC E LEFT

(2 val.) (1) Determine a base B de $\mathbb{R}^2$ para a qual

$$[(1,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad [(1,-1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e o subespaço

$$U_\alpha = L(\{(1,\alpha,1,2+\alpha),(1,\alpha,\alpha^2,1),(1,\alpha^2,\alpha,1)\})$$

(1,5 val.) (a) Determine a dimensão de U_α em função de α.

(1,5 val.) (b) Para $\alpha = 1$ determine uma base ortonormada para $U_\alpha^\perp$.

(1 val.) (3) Defina o que se entende por um conjunto linearmente dependente de vetores num espaço vetorial.

(4) Considere o espaço vetorial V dos polinómios de grau ≤ 2 com a base $B = (1,t,t^2)$ e o produto interno definido por

$$\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\ dt$$

(1,5 val.) (a) Determine a matriz da métrica deste produto interno em V com respeito à base B.

(1,5 val.) (b) Determine um conjunto de geradores para o subespaço de V ortogonal ao vetor t.

(1,5 val.) (5) Determine se a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 4xz$$

assume algum valor negativo em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo indique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) < 0$.
Note que 2 é um valor próprio da matriz simétrica associada a f.

(6) Considere a transformação linear $T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1 val.) (a) Determine a representação matricial de T com respeito a bases à sua escolha.

(1 val.) (b) Determine uma base para $\mathrm{Im}(T)$ e a dimensão do núcleo de T.

(1 val.) (c) Dê uma expressão para uma transformação linear $S\colon M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $S \circ T$ tenha forma canónica de Jordan $\left[\begin{smallmatrix} 2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right]$.

(1 val.) (7) Determine as soluções da seguinte equação matricial

$$\det(A)A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(8) Seja

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2-1 & 3 \\ x & x^2+1 & 1 & 1 \\ x^2 & 2 & 3 & -2 \\ x^3 & 1 & x-1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 val.) (a) Calcule o determinante de $A(1)$ indicando se a matriz $A(1)$ é invertível.

(1 val.) (b) Justifique que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que a matriz $A(x)$ não é invertível. *Sugestão:* $\det A(x)$ *é um polinómio de que grau? Aplique o Teorema do Valor Médio.*

(9) Seja A a matriz com decomposição SVD dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(0,5 val.) (a) Calcule a projeção ortogonal de $(1,2,-1)$ no espaço das colunas de A.

(0,5 val.) (b) Determine a distância de $(1,2,3,-1)$ ao espaço das linhas de A.

(1,5 val.) (10) Sejam $v_1 = (1,2,1,0)$ e $v_2 = (0,1,-1,2)$. Indique justificadamente se existe uma matriz anti-simétrica $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ tal que $Av_1 = v_2$ e $Av_2 = -v_1$.