Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiol e LEBiom
Exame de Recuperação - 18 de Janeiro de 2024 - 13h
Duração: 2 horas
Nota do Exame = soma das notas dos Testes/3

Grupo I – Teste 1 – 40 minutos

1. Seja α um parâmetro real e considere o sistema linear cuja a matriz aumentada é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \end{array}\right]$$

   (a) (2 val.) Determine a característica de A em função de α.

   (b) (3 val.) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

   (c) (3 val.) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto de soluções do sistema.

   (d) (2 val.) Para $\alpha = 1$, determine equações cartesianas que descrevem o espaço das linhas de A.

2. (2 val.) Seja $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível que satisfaz

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Determine a entrada $4, 2$ (linha 4, coluna 2) de A^{-1}.

3. (2 val.) Sejam $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X que satisfaz a equação $BX^TA - A^{-1}B^{-1} = 0$.

4. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios de grau ≤ 2 e o subconjunto

$$U = \{\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \text{ e } a_1 = 0\}.$$

   (a) (2 val.) Mostre que U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$.

   (b) (2 val.) Determine um conjunto gerador de U.

5. (2 val.) Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = A + B$. Mostre que $AB = BA$.

Grupo II – Teste 2 – 40 minutos

1. Considere o espaço linear de todas as funções reais de variável real e o subconjunto $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$.

   (a) (1 val.) Verifique se S é linearmente independente.

   (b) (2 val.) Determine, justificando, uma base para $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

2. Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 1 e $T : V \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}.$$

   Considere a transformação linear $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$A_{f,B_c,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   em relação à base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$B_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e à base} \quad B = ((1,1),(1,-1)) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

   (a) (2 val.) Determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base $B' = (1, t)$ de V e à base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) (3 val.) Calcule $(f \circ T)(1 - t)$.

   (c) (3 val.) Determine uma base para o núcleo de f.

   (d) (2 val.) Diga, justificadamente, se $f \circ T$ é um isomorfismo.

   (e) (2 val.) Resolva em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a equação linear $f(A) = (2, 0)$.

3. (3 val.) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A^7 - A^6)$.

4. (2 val.) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = L(\{(1,1)\})$ e $T(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$.

Grupo III – Teste 3 – 40 minutos

1. Para cada α considere a transformação linear $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica é representada pela matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

   (a) (3 val.) Mostre que $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,0,-1)$ são vetores próprios de T_α e determine os valores próprios associados.

   (b) (3 val.) Determine os valores próprios de T_α e indique os valores de α para os quais T_α tem 3 valores próprios todos distintos.

   (c) (2 val.) Diga, justificando, se T_2 é diagonalizável.

   (d) (3 val.) Para $\alpha = 3$, usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, calcule a projeção ortogonal de v_1 em $E(3)$ (espaço próprio associado ao valor próprio 3).

   (e) (4 val.) Determine B tal que $B^2 = A_3$. *Sugestão: diagonalize.*

2. (3 val.) Determine a expressão para o produto interno no espaço dos polinómios de grau ≤ 1 em relação ao qual a base $B = (1, 1-t)$ é ortonormada.

3. (2 val.) Mostre que a forma quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ onde $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz anti-simétrica é identicamente nula.