Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEBiom

Exame 2 - 10 de Fevereiro de 2023 - 10h30

Duração: 2h

Apresente e justifique todos os cálculos

Exame 2

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema linear

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2 val.) (a) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

(1 val.) (b) Para $\alpha = 3$, determine o conjunto de soluções do sistema.

(2 val.) (c) Para $\alpha = 3$ determine a dimensão e uma base para a intersecção do espaço das linhas de A com o subespaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

2. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja representação nas bases ordenadas $B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ e $B_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1))$ é

$$A_{T,B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) (a) Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$.

(1 val.) (b) Indique, justificando, se a imagem de T é isomorfa a um plano em $\mathbb{R}^3$.

(1 val.) (c) Determine o núcleo de T.

(1 val.) (d) Resolva em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a equação linear $T(A) = (5, 1, -1)$.

(2 val.) (e) Considere o produto interno em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$. Determine a distância de $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ao núcleo de T.

(2 val.) 3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 0 & d & 1 \end{bmatrix}$ tal que $\det A = 3$ e $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Calcule

$$\det \begin{bmatrix} \det(2B^TB^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2d & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Seja V o espaço linear dos polinómios reais de grau ≤ 2. Considere a transformação linear $T : V \to V$ tal que

- $1 + t^2$ é um vetor próprio com valor próprio 1;
- $1 + t$ é um vetor próprio com valor próprio 3;
- o núcleo de T é dado por $N(T) = \{\alpha t^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(1 val.) (a) Determine a matriz mudança de base $S_{B\to B_c}$ da base $B = (1 + t^2, 1 + t, t^2)$ para a base canónica $B_c = (1, t, t^2)$.

(1 val.) (b) Determine a matriz que representa T na base canónica B_c.

(1 val.) (c) Determine a expressão geral da transformação linear T.

5. Considere a forma quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + 4xy - 3z^2$.

(1 val.) (a) Classifique f.

(1 val.) (b) Determine um subespaço $U \in \mathbb{R}^3$ de dimensão 1 tal que $f(u) \geq 0$ para todo o $u \in U$.

(2 val.) 6. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes simétricas tal que B tem valores próprios positivos. Mostre que BA é diagonalizável. *Sugestão: mostre que existe uma matriz X tal que $B = XX^T$ e considere a matriz $X^{-1}BAX$.*