Exercícios sobre a teoria de grupos

February 26, 2009

1. Seja $V = \{1, i, j, k\}$. Definimos uma operação comutativa: $i^2 = j^2 = k^2 = 1$ e $ij = k, ik = j, jk = i$.

   a) Mostre que V é um grupo.

   b) Mostre que V não é isomorfo com $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

   c) Mostre que os únicos grupos de ordem 2 e 3 são $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2. Define-se um produto em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ por

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}.$$

   a) Mostre que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ não forma um grupo com o produto em geral.

   b) Define-se $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ como sendo o grupo formado pelos elementos que são invertíveis relativamente ao produto. Determine os elementos de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ e mostre que $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ é isomorfo com V.

3. Determine o grupo das simetrias de um quadrado.

4. Seja X um conjunto qualquer e seja $P(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Sejam A e B elementos de $P(X)$. Define-se

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

   a) Mostre que $(P(X), \triangle)$ é um grupo.

   b) Se X tem 2 elementos, mostre que $(P(X), \triangle)$ é isomorfo com V.

5. Vamos definir um produto em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Sejam (a,b) e (c,d) elementos de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Define-se

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mostre que $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ com este produto é um grupo. Note-se que normalmente se escreve $a + ib$ em vez de (a,b), com a convenção de que $i^2 = -1$. Estes números dizem-se os *números complexos*.

6. Seja $Q = \{\pm 1, \pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$, onde

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine a tabela de multiplicação de Q.

   b) Mostre que Q não é comutativo.

7. Mostre que o grupo D_n pode ser obtido com dois geradores x e y e as relações $x^2 = y^2 = (xy)^n = 1$.

8. Neste exercício consideramos permutações:

   a) Quantas permutações dum conjunto de n elementos existem?

   b) Mostre que os elementos $(1i)$, $i = 1, \ldots, n$, geram S_n.

   c) Mostre que S_3 é isomorfo com D_3.

9. Neste exercício consideramos o grupo das tranças:

   a) Mostre que, se o fecho duma trança em B_n é um nó (i.e. tem apenas 1 componente) isto implica que a permutação que é a imagem da trança sob o homomorfismo explicado na aula teórica tem ordem n.

   b) Mostre que qualquer nó pode ser obtido como fecho duma trança.