Folhas

Cálculo Diferencial e Integral I

MEEC, MEAmb

2^{o} semestre 2008/09

Miguel Abreu
Rui Loja Fernandes
Manuel Ricou
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

28 de Agosto de 2009

DMIST - 2008

Conteúdo

Capítulo 1

Os Números Reais

O estudo de qualquer área da Matemática requer a selecção de um *ponto de partida* apropriado, que é na prática um conjunto de noções e resultados matemáticos que tomamos como *aceites*, ou seja, que não carecem de definição ou demonstração no contexto da teoria a desenvolver. As noções a usar sem prévia definição são por isso mesmo os *termos indefinidos* dessa teoria, e as propriedades que não são demonstradas mas que são tomadas como verdadeiras são os seus *axiomas*. Este é afinal o modelo de qualquer teoria dedutiva há mais de 25 séculos, pelo menos desde que os matemáticos da Grécia Antiga fizeram as suas descobertas fundamentais sobre a estrutura lógica da Geometria.

Existem múltiplas possibilidades de escolha para basear o estudo dos números reais, incluindo o de começar com propriedades dos *números naturais*, ou mesmo directamente com a *Teoria dos Conjuntos*, que é aliás, e em última análise, a base de toda a Matemática actual. A nossa opção aqui é muito mais expedita, antes do mais por evidentes razões de economia de tempo, e *tomamos os próprios números reais como termos indefinidos*. Seleccionamos, além disso, um pequeno conjunto de propriedades básicas dos números reais como *axiomas*. Com uma única excepção (o chamado *Axioma do Supremo*), todas essas propriedades são bem conhecidas, e o leitor estará provavelmente habituado a tomá-las como "evidentes".

Supomos conhecidos os resultados e ideias base da Teoria dos Conjuntos, mas todas as restantes definições aqui introduzidas não envolvem outros conceitos, e todas as afirmações aqui incluídas são *teoremas* demonstrados a partir dos axiomas iniciais, usando as leis da Lógica. Naturalmente, é indispensável adquirir, em paralelo com o desenvolvimento rigoroso da teoria, um entendimento intuitivo dos resultados obtidos, que ajuda em particular a identificar as condições em que as ideias em causa podem ser úteis na construção de modelos matemáticos da realidade física. Sob este aspecto, supomos conhecida em especial a correspondência entre os números reais e os pontos de uma qualquer recta (dita *recta real*). Essa correspondência é fixada, como sabemos, uma vez escolhidos dois pontos específicos, que representam os reais *zero* e *um*. Essa escolha determina também um sentido *crescente* na recta, do ponto 0 para o ponto 1, que materializa outra das propriedades mais fundamentais dos reais, que é o seu *ordenamento*.

1.1 Axiomas Algébricos

O nosso primeiro axioma é uma simples afirmação de *existência*:

Axioma 1.1.1. *Existe um conjunto* $\mathbb{R}$*, dito dos números reais. Existem duas operações algébricas em* $\mathbb{R}$*, a* soma (ou adição) *e o* produto (ou multiplicação)*, designadas por "+" e "·", ou seja, se* $x, y \in \mathbb{R}$ *então* $x + y \in \mathbb{R}$ *e* $x \cdot y \in \mathbb{R}$*.*

As propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação são as seguintes, onde usamos as habituais convenções sobre parênteses.

Axioma 1.1.2. *Para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *temos*

1. COMUTATIVIDADE*:* $a + b = b + a$*, e* $a \cdot b = b \cdot a$*.*
2. ASSOCIATIVIDADE*:* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *e* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$*.*
3. DISTRIBUTIVIDADE*:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$*.*
4. ELEMENTOS NEUTROS*: Existem elementos* $0, 1 \in \mathbb{R}$*, onde* $0 \neq 1$*, tais que* $a + 0 = a \cdot 1 = a$*.*
5. SIMÉTRICOS*: A equação* $a + x = 0$ *tem solução* $x \in \mathbb{R}$*.*
6. INVERSOS*: Se* $a \neq 0$*, a equação* $a \cdot y = 1$ *tem solução* $y \in \mathbb{R}$*.*

Como é usual, muitas vezes omitimos o símbolo "·", indicando o produto por simples juxtaposição (xy em vez de $x \cdot y$). Sendo certo que as propriedades indicadas acima são bem conhecidas, e são normalmente consideradas como "óbvias", deve notar-se que estão longe de caracterizar completa e especificamente os números reais. Por exemplo, deve ser intuitivamente evidente que se substituirmos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Z}$ (os números inteiros), $\mathbb{Q}$ (os números racionais), ou $\mathbb{C}$ (os números complexos), então as propriedades 1 a 5 são sempre verdadeiras, e 6 só não é verdadeira para os inteiros([1]). Por outro lado, existem propriedades indesmentíveis dos números reais, como o facto

[1]Qualquer conjunto não vazio com duas operações algébricas que satisfaçam as propriedades 1 a 5 diz-se um ANEL COMUTATIVO COM IDENTIDADE, e se 6 for igualmente satisfeita diz-se um CORPO. Portanto, $\mathbb{Z}$ é um *anel comutativo com identidade*, e $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são *corpos*.

de $\mathbb{R}$ ser um conjunto infinito([2]), que não se podem deduzir das aqui indicadas como axiomas. Voltaremos mais adiante aos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$, em particular para os definir no contexto da nossa teoria, mas passamos a mostrar que, em qualquer caso, podemos desde já obter muitas outras propriedades algébricas elementares dos reais, mas agora como *teoremas*.

O leitor mais atento terá notado que no axioma 1.1.2 não se faz qualquer referência à *unicidade* dos elementos 0 e 1 que são referidos em 4, nem muito menos à unicidade (para cada elemento a) dos reais x e y referidos em 5 e 6. É interessante mostrar que tal referência seria supérflua, porque a unicidade se segue de um princípio algébrico básico:

Teorema 1.1.3. (Leis do Corte) *Para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *temos*

a) Lei do Corte para a Soma*:* $b + a = c + a \Rightarrow b = c$*.*

b) Lei do Corte para o Produto*:* $a \neq 0$ *e* $b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$*.*

Em particular,

c) Unicidade do Elemento Neutro da Soma*:*
Se $u \in \mathbb{R}$ *e* $x + u = x$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *então* $u = 0$*.*

d) Unicidade dos Simétricos*:*
Para cada a *existe um* único $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $a + x = 0$*.*

e) Unicidade do Elemento Neutro do Produto*:*
Se $v \in \mathbb{R}$ *e* $x \cdot v = x$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *então* $v = 1$*.*

f) Unicidade dos Inversos*:*
Para cada $a \neq 0$ *existe um* único $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \cdot y = 1$*.*

Demonstração. Mostramos aqui que as afirmações acima são consequências lógicas das afirmações no axioma 1.1.2. Para provar a), temos

$$\begin{array}{lll} & (b+a)+x = (c+a)+x & \text{(Pela hipótese inicial, e se } x \in \mathbb{R}\text{,)} \\ \Rightarrow & b+(a+x) = c+(a+x) & \text{(Porque a soma é associativa: 1.1.2.2.)} \\ \Rightarrow & b+0 = c+0 & \text{(Se } x \text{ é simétrico de } a\text{: 1.1.2.5.)} \\ \Rightarrow & b = c & \text{(Porque 0 é neutro da soma: 1.1.2.4.)} \end{array}$$

A verificação de c) é também muito simples. Temos em particular (fazendo $x = u$) que $u + u = u$. Por outro lado, temos de 1.1.2.4 e 1.1.2.1 que $0 + u = u + 0 = u$, e segue-se de a) que $u + u = 0 + u \Rightarrow u = 0$.

[2] O conjunto $X = \{0, 1\}$ com as operações (da aritmética *binária*) dadas por $0 + 0 = 1 + 1 = 0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1 = 1 \cdot 1$ satisfaz as propriedades 1 a 6, mas é evidentemente finito, pelo que o facto de $\mathbb{R}$ ser infinito não pode ser consequência lógica destas propriedades! É claro que ainda não definimos rigorosamente a noção de "conjunto infinito", mas por enquanto o nosso entendimento intuitivo deve ser suficiente.

Para demonstrar d), supomos que $x, y \in \mathbb{R}$ satisfazem $a+x=0=a+y$. Temos então de 1.1.2.1 que $x+a=y+a$, e segue-se de a) que $x=y$.

As afirmações b), e) e f) provam-se de forma análoga, e ficam como exercício. □

Deve notar-se que, como a soma e o produto são comutativos, muitas das afirmações no axioma 1.1.2 e no teorema 1.1.3 podem tomar múltiplas formas, que usaremos sem comentários adicionais. Por exemplo, é claro que $a+0=0+a=0$ e $a\cdot 1=1\cdot a=a$ (1.1.2.4), e que $a+b=c+a \Rightarrow b=c$ (1.1.3 a)).

Passamos a introduzir mais algumas definições elementares:

Definição 1.1.4. *(simétricos e inversos, diferenças e quocientes)*

a) Se $a \in \mathbb{R}$, a única solução de $a+x=x+a=0$ é o SIMÉTRICO de a, e designa-se $-a$.

b) Se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, a única solução de $a\cdot y=y\cdot a=1$ é o INVERSO de a, e designa-se a^{-1}.

c) Se $a, b \in \mathbb{R}$, a DIFERENÇA b menos a designa-se $b-a$, e é dada por $b-a=b+(-a)$.

d) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o QUOCIENTE de b por a designa-se b/a ou $\frac{b}{a}$, e é dado por $b/a=b\cdot(a^{-1})$.([3])

É curioso observar que se segue da unicidade de simétricos e inversos que o simétrico de 0 é 0, i.e., $0=-0$, e o inverso de 1 é 1, $1^{-1}=1$ (porquê?). Deve também notar-se que a diferença e o quociente são exemplos simples de operações algébricas que não são comutativas nem associativas. O próximo teorema lista mais algumas propriedades algébricas elementares dos números reais. Mais uma vez, deve notar-se que é válido tanto em $\mathbb{R}$ como em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$([4]). O resultado é também válido substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Z}$, com excepção de b), e notando em g) que o inverso de um inteiro não-nulo não é, em geral, um inteiro.

Teorema 1.1.5. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ então:*

a) $x=b-a$ *é a única solução de* $a+x=b$ *em* $\mathbb{R}$.

b) Se $a \neq 0$ *então* $y=b/a$ *é a única solução de* $a\cdot y=b$ *em* $\mathbb{R}$.

c) $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

d) Se $a\cdot b=0$ *então* $a=0$ *ou* $b=0$.

---

[3] Seguindo as convenções usuais sobre a prioridade das operações elementares, podemos escrever $b\cdot a^{-1}$ sem parênteses.

[4] Na realidade, o teorema 1.1.5 é válido em qualquer corpo.

e) $-(-a) = a$ *e* $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$.([5])

f) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$ *e* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

g) Se $b \neq 0$, *então* $-(b^{-1}) = (-b)^{-1}$.

Demonstração. Provamos algumas destas afirmações, a título de exemplo, começando com c). É claro que $a \cdot 0 = 0 \cdot a$, por comutatividade. Para mostrar que $a \cdot 0 = 0$, notamos que:

$$\begin{array}{lll} & a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0+0) & \text{(Por distributividade: 1.1.2.3.)} \\ \Rightarrow & a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 & \text{(Porque } 0+0=0\text{: 1.1.2.4.)} \\ \Rightarrow & a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 & \text{(Por 1.1.2.4.)} \\ \Rightarrow & a \cdot 0 = 0 & \text{(Pela a) de 1.1.3.)} \end{array}$$

Para provar d), temos que demonstrar que se $a \cdot b = 0$ e $b \neq 0$ então $a = 0$ (porquê?). Procedemos como se segue:

$$\begin{array}{lll} & (a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} & \text{(Por hipótese.)} \\ \Rightarrow & a \cdot (b \cdot b^{-1}) = 0 & \text{(Por associatividade e c).)} \\ \Rightarrow & a \cdot 1 = 0 & \text{(Porque } b \cdot b^{-1} = 1.\text{)} \\ \Rightarrow & a = 0 & \text{(Porque } a \cdot 1 = a.\text{)} \end{array}$$

As demonstrações das restantes afirmações são sobretudo aplicações da lei do corte apropriada. Por exemplo, para mostrar que $-(-a) = a$, basta-nos verificar que

$$\begin{array}{lll} & (-a) + a = 0 & \text{(Por definição.)} \\ & (-a) + (-(-a)) = 0 & \text{(Também por definição.)} \\ \Rightarrow & (-a) + a = (-a) + (-(-a)) & \text{(Por razões óbvias.)} \\ \Rightarrow & a = -(-a) & \text{(Pela lei do corte para a soma.)} \end{array}$$

A demonstração da identidade $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$ é ligeiramente mais complexa:

$$\begin{array}{lll} & a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b & \text{(Por distributividade.)} \\ \Rightarrow & a \cdot b + (-a) \cdot b = 0 \cdot b & \text{(Porque } a + (-a) = 0.\text{)} \\ \Rightarrow & a \cdot b + (-a) \cdot b = 0 & \text{(Porque } 0 \cdot b = 0\text{, por c).)} \\ \Rightarrow & a \cdot b + (-a) \cdot b = a \cdot b + [-(a \cdot b)] & \text{(Porque } a \cdot b + [-(a \cdot b)] = 0.\text{)} \\ \Rightarrow & (-a) \cdot b = -(a \cdot b) & \text{(Pela lei do corte para a soma.)} \end{array}$$

□

[5] É comum referirmo-nos às alíneas e) a g) como "*regras dos sinais*".

Terminamos esta breve introdução às propriedades algébricas dos reais com as usuais regras para manipular fracções, e os chamados "casos notáveis" da multiplicação, que são também consequências dos axiomas já apresentados. A sua demonstração não deve apresentar dificuldades.

Teorema 1.1.6. *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *com* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$. *Temos então:*

a) $a/b \neq 0$ *se e só se* $a \neq 0$.

b) $b/b = 1$, *para qualquer* $b \neq 0$.

c) $a/b \pm c/d = (a \cdot d \pm b \cdot c)/(b \cdot d)$, $(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d)$.

d) Se $c/d \neq 0$ *então* $(a/b)/(c/d) = (a \cdot d)/(b \cdot c)$.

e) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ *e* $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$.

1.2 Desigualdades e Relação de Ordem

Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ podem ser *ordenados*, e a resolução de desigualdades (por vezes chamadas *inequações*) resulta da aplicação de propriedades adequadas desse ordenamento. Introduzimos aqui essas propriedades, naturalmente sob a forma de um axioma, que é conveniente formular em termos do conjunto dos *reais positivos*, designado por $\mathbb{R}^+$.

Axioma 1.2.1. *Existe um conjunto* $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, *formado pelos reais positivos, tal que:*

1. Fecho de $\mathbb{R}^+$ em relação à soma e ao produto*:*

$$\textit{Para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}^+, \ \textit{temos } a + b \in \mathbb{R}^+, a \cdot b \in \mathbb{R}^+.$$

2. Tricotomia*: Qualquer* $a \in \mathbb{R}$ *verifica uma e uma só das seguintes três condições:*

$$a \in \mathbb{R}^+ \textit{ ou } a = 0 \textit{ ou } (-a) \in \mathbb{R}^+.$$

Definimos o conjunto dos *reais negativos*, designado $\mathbb{R}^-$, por

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}.$$

A propriedade de tricotomia é equivalente a afirmar que os conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são *disjuntos*, e a sua união é $\mathbb{R}$. Usa-se por vezes o símbolo "$\sqcup$" para representar uniões de conjuntos disjuntos, ou seja, a identidade $C = A \sqcup B$ significa que C é a união de A e B, e $A \cap B = \emptyset$ é o conjunto vazio. Nesta notação, a propriedade de tricotomia escreve-se

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}^-.$$

Note-se de passagem que o axioma 1.2.1 é válido, com as alterações óbvia, para $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e é portanto claro que os axiomas 1.1.1, 1.1.2 e 1.2.1 não podem ser considerados como uma caracterização adequada de $\mathbb{R}$, porque se aplicam igualmente a $\mathbb{Q}$([6]). A *relação de ordem* em $\mathbb{R}$ pode ser definida directamente a partir do conjunto $\mathbb{R}^+$ como se segue:

Definição 1.2.2. (Relação de Ordem em $\mathbb{R}$) Se $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que a É MENOR QUE b ou que b É MAIOR QUE a, escrevendo $a < b$ ou $b > a$, quando $(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Dizemos também que a É MENOR OU IGUAL A b ou que b É MAIOR OU IGUAL A a, escrevendo $a \leq b$ ou $b \geq a$, quando $b > a$ ou $b = a$.

De acordo com esta definição, temos

$$a > 0 \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a < 0 \Longleftrightarrow -a \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}^-.$$

O axioma 1.2.1 conduz então directamente a:

Teorema 1.2.3. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ então*

a) $a > 0$ *e* $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ *e* $a \cdot b > 0$.

b) Verifica-se exactamente um de três casos possíveis:

$$a > b, \ \ b > a \ \text{ ou } a = b.$$

O próximo teorema indica algumas das mais elementares propriedades das desigualdades em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2.4. *Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se que:*

a) TRANSITIVIDADE*:* $a < b$ *e* $b < c \Longrightarrow a < c$.

b) $a < b \Longleftrightarrow -a > -b$.

c) LEI DO CORTE*:* $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$.

d) $a < c$ *e* $b < d \Longrightarrow a + b < c + d$.

Dem. Começamos por verificar a):

$$\begin{array}{lll} & a < b \text{ e } b < c & \text{(Por hipótese.)} \\ \Leftrightarrow & (b-a), (c-b) \in \mathbb{R}^+ & \text{(Pela definição 1.2.2.)} \\ \Rightarrow & (b-a) + (c-b) \in \mathbb{R}^+ & \text{(Pela a) do teorema 1.2.3.)} \\ \Leftrightarrow & (c-a) \in \mathbb{R}^+ & \text{(Porque } c - a = (b-a) + (c-b).\text{)} \\ \Rightarrow & a < c & \text{(Pela definição 1.2.2.)} \end{array}$$

[6] É também interessante verificar que 1.2.1 não é válido para os complexos, por razões muito simples que apontaremos adiante.

A b) resulta de observar, a partir de 1.1.5 e), que

$$(-a) - (-b) = -(-b) + (-a) = b + (-a) = b - a.$$

Temos assim

$$a < b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow (-a) - (-b) \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow -b < -a.$$

A c) resulta de $(b + c) - (a + c) = b - a$:

$$a < b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow a + c < b + c.$$

Para provar d), notamos que, como $c > a$ e $d > b$, temos

$$c - a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } d - b \in \mathbb{R}^+, \text{ donde } (d - b) + (c - a) \in \mathbb{R}^+ \text{de 1.2.1.1, donde}$$

$$c + d > a + b \Leftrightarrow (c + d) - (a + b) = (d - b) + (c - a) \in \mathbb{R}^+$$

$\square$

A manipulação de desigualdades que envolvem produtos e divisões é mais delicada, e alguns dos erros mais comuns na sua resolução resultam da incorrecta utilização de regras referidas no próximo resultado! Note-se que, como é usual, escrevemos $a^2 = a \cdot a$.

Teorema 1.2.5. *Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se que:*

a) $a \cdot b > 0 \Longleftrightarrow (a > 0$ *e* $b > 0)$ *ou* $(a < 0$ *e* $b < 0)$.

b) Lei do Corte*:* $a \cdot c < b \cdot c \Longleftrightarrow (a < b$ *e* $c > 0)$ *ou* $(a > b$ *e* $c < 0)$.

c) $a^2 > 0$ *se e só se* $a \neq 0$*, e em particular* $1 > 0$.([7])

Dem. Para provar a), analisamos todos os casos possíveis:

(i)	$a > 0$ e $b > 0$	$\Rightarrow a \cdot b > 0$	(1.2.3 a).)
(ii)	$a < 0$ e $b < 0$	$\Rightarrow -a > 0$ e $-b > 0$	(1.2.4 b).)
		$\Rightarrow a \cdot b = (-a) \cdot (-b) > 0$	(1.1.5 f) e 1.2.3 a).)
(iii)	$a < 0$ e $b > 0$	$\Rightarrow -a > 0$ e $b > 0$	(1.2.4 b).)
		$\Rightarrow (-a) \cdot b = -(a \cdot b) > 0$	(1.1.5 f) e 1.2.3 a).)
		$\Rightarrow a \cdot b < 0$	(1.2.4 b).)
(iv)	$a > 0$ e $b < 0$	$\Rightarrow a \cdot b < 0$	(Análogo a (iii).)
(v)	$a = 0$ ou $b = 0$	$\Rightarrow a \cdot b = 0$	(1.1.5 c).)

Resulta claramente que

$$(a > 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0) \Longleftrightarrow a \cdot b > 0.$$

[7] É por esta razão que é impossível ordenar os complexos. Como $-1 = i^2$ em $\mathbb{C}$, se os complexos pudessem ser ordenados teríamos simultaneamente $-1 > 0$ e $1 > 0$, o que viola a propriedade de tricotomia.

A Lei do Corte em b) é uma aplicação simples de a):

$$a \cdot c < b \cdot c \Longleftrightarrow 0 < b \cdot c - a \cdot c \Longleftrightarrow 0 < (b - a) \cdot c \Longleftrightarrow$$

$$(b - a > 0 \text{ e } c > 0) \text{ ou } (b - a < 0 \text{ e } c < 0) \Longleftrightarrow$$

$$(b > a \text{ e } c > 0) \text{ ou } (b < a \text{ e } c < 0)$$

A observação em c) resulta de tomar $a = b$ em a), e em particular de tomar $a = 1$, porque $1^2 = 1$. □

O *módulo* ou *valor absoluto* de um real x representa, como deve saber, a *distância* de x à origem:

Definição 1.2.6. O MÓDULO ou VALOR ABSOLUTO de $x \in R$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0; \\ -x\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

É claro que $|x| = 0$ se e só se $x = 0$, e que para $x \neq 0$ temos $|x| > 0$. Note-se igualmente que $x^2 = (-x)^2 = |x|^2$, e em particular $|x| = \sqrt{x^2}$.([8]) Passamos a indicar outras propriedades elementares do valor absoluto.

Teorema 1.2.7. *Para quaisquer $a, x, y \in \mathbb{R}$ temos:*([9])

a) $-|x| \leq x \leq |x|$ *e* $-|x| \leq -x \leq |x|$.

b) $|x| \leq \epsilon \;\Leftrightarrow\; -\epsilon \leq x \leq \epsilon$, *e* $|x - a| \leq \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$.

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *e, se* $y \neq 0$, $|x|/|y| = |x/y|$.

d) DESIGUALDADE TRIANGULAR*:* $|x + y| \leq |x| + |y|\,,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

e) $x^2 \leq y^2 \Longleftrightarrow |x| \leq |y|$.

f) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Dem. Deixamos a demonstração de a) como exercício. Para as restantes afirmações, procedemos como se segue

---

[8]A RAÍZ QUADRADA de a, se existir, é a única solução $x = \sqrt{a}$ da equação $x^2 = a$ com $x \geq 0$.

[9]Se $z = x + iy$ é um complexo, com $x, y \in \mathbb{R}$, então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é o módulo de z, e representa a distância no plano complexo entre z e a origem. As propriedades em 1.2.7 são válidas também para complexos, com a óbvia excepção de c). Se $a \in \mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$, os conjuntos $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \epsilon\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \epsilon\}$ são círculos de raio ϵ, centrados respectivamente na origem, e em a.

b): Consideramos separadamente os casos $x \geq 0$ e $x < 0$:

$$\begin{aligned} x \geq 0 \text{ e } |x| \leq \epsilon &\iff 0 \leq x \leq \epsilon. \\ x < 0 \text{ e } |x| \leq \epsilon &\iff 0 < -x \leq \epsilon \iff -\epsilon < x < 0. \end{aligned}$$

A equivalência $|x-a| \leq \epsilon \Leftrightarrow a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon$ é uma consequência da anterior, obtida substituindo na primeira x por $x-a$.

$$|x-a| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x-a \leq \epsilon \iff a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon.$$

c): O resultado é evidente se $x \cdot y = 0$ ou se $x > 0$ e $y > 0$. Os restantes casos seguem-se de "regras dos sinais" do teorema 1.1.5. Consideramos (apenas a título de exemplo) o caso $x > 0$ e $y < 0$, em que $x \cdot y < 0$ e $x/y < 0$.

$$|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y| \text{ e } |x/y| = -(x/y) = x/(-y) = |x|/|y|.$$

d): A "desigualdade triangular" resulta de observar que

$$|x+y| = x+y \text{ ou } |x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y),$$

As desigualdades em a) mostram agora que

$$x+y \leq |x|+|y| \text{ e } (-x)+(-y) \leq |x|+|y|.$$

e): É claro que
$$x^2 = y^2 \iff x = \pm y \iff |x| = |y|.$$

Se $x^2 < y^2$, notamos que $x^2 - y^2 = |x|^2 - |y|^2 = (|x|-|y|)(|x|+|y|)$ e

$$x^2 < y^2 \iff (|x|-|y|)(|x|+|y|) < 0 \iff |x|-|y| < 0 \iff |x| < |y|$$

f): Como

$$\begin{aligned} &|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2+y^2-2x \cdot y, \text{ e} \\ &||x|-|y||^2 = (|x|-|y|)^2 = |x|^2+|y|^2-2|x||y| = x^2+y^2-2|x \cdot y|, \\ &\text{segue-se que } |x-y|^2 - ||x|-|y||^2 = -2x \cdot y + 2|x \cdot y| \geq 0 \end{aligned}$$

□

Os *intervalos* são subconjuntos de $\mathbb{R}$ particularmente simples, e correspondem a segmentos de recta, semi-rectas, ou a própria recta real:

Definição 1.2.8. (Intervalos) Se $a, b \in \mathbb{R}$ definimos os seguintes INTERVALOS com EXTREMOS a e b:

- O intervalo ABERTO $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$.

- O intervalo FECHADO $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$.
- Os intervalos semi-abertos (e semi-fechados) $[a,b[\, = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ e $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$.

  Definimos ainda intervalos com extremos infinitos:
- ABERTOS: $]a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}$ e $]-\infty,b[\, = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$.
- FECHADOS: $[a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$ e $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$.
- Dizemos ainda que $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$ é um intervalo aberto e fechado.([10]).

Note-se a título de ilustração que

$$]a,a[\, = \emptyset, [a,a] = \{a\} \text{ e }]-a,a[=\{x \in \mathbb{R} : |x| < a\}.$$

É também importante reconhecer que

$$]a-\epsilon, a+\epsilon[=\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \epsilon\}.$$

Se x é uma APROXIMAÇÃO ou VALOR APROXIMADO de a, então $|x-a|$ é o ERRO dessa aproximação, e o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \epsilon\}$ é formado por *todos os reais que são aproximações de a com erro inferior a ϵ*. Esta ideia é utilizada por todo o Cálculo Diferencial e Integral, e deve ser por isso muito bem compreendida. Qualquer intervalo aberto I tal que $a \in I$ diz-se aliás uma VIZINHANÇA de a, e a chamada VIZINHANÇA-ϵ de a é dada por

$$V_\epsilon(a) =]a-\epsilon, a+\epsilon[=\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \epsilon\}.$$

As noções de *máximo* e de *mínimo* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ são certamente bem conhecidas. Dizemos que a é MÁXIMO de A, e escrevemos $a = \max A$, se e só se

$$a \in A \text{ e } x \leq a, \text{ para qualquer } x \in A.$$

Analogamente, b é MÍNIMO de A, e escrevemos $b = \min A$, se e só se

$$b \in A \text{ e } b \leq x, \text{ para qualquer } x \in A.$$

É evidente que $\min A$ e $\max A$ são únicos, caso existam. Introduzimos aqui também as noções um pouco mais gerais de *majorante* e *minorante* do conjunto A:

Definição 1.2.9. (Majorante e Minorante de A): Se $A \subset \mathbb{R}$, e $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que

[10] A noção de *intervalo* pode ser usada em qualquer conjunto ordenado, mas pode conduzir a resultados inesperados. Por exemplo, em $\mathbb{Z}$ temos $]0,3[=\{1,2\}$, e $]0,1[=\emptyset$. É claro que em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{Q}$ estes dois intervalos são *conjuntos infinitos*.

a) a é MAJORANTE de A se e só se $x \leq a$, para qualquer $x \in A$. Se A tem majorantes, diz-se que A é um conjunto MAJORADO.

b) b é MINORANTE de A se e só se $b \leq x$, para qualquer $x \in A$. Se A tem minorantes, diz-se que A é MINORADO.

c) Se A tem majorantes E minorantes, então dizemos que A é um conjunto LIMITADO. Caso contrário, A diz-se ILIMITADO.

Sendo óbvio que o máximo de A, se existir, é majorante de A, e o mínimo de A, também se existir, é minorante de A, deve ser também claro que os majorantes e os minorantes de A, se existirem, formam conjuntos infinitos. Repare-se ainda que se $A \neq \emptyset$ e a e b são respectivamente majorante e minorante de A então $a \geq b$.([11])

Ilustramos estas ideias com alguns exemplos simples:

1. O intervalo $[0, 1]$ tem mínimo 0 e máximo 1. Os seus majorantes formam o intervalo $[1, \infty[$, e os minorantes formam o intervalo $]-\infty, 0]$. Note-se que o *mínimo é o maior minorante* e o *máximo é o menor majorante*. O intervalo é limitado.

2. O intervalo $]0, [[$ não tem mínimo nem máximo. Os seus majorantes formam o intervalo $[1, \infty[$, e os minorantes formam o intervalo $]-\infty, 0]$. Note-se que 0 é ainda o *maior minorante* e 1 é o *menor majorante*. O intervalo é limitado.

3. $\mathbb{R}^+$ é minorado, mas não é majorado, logo é ilimitado. Os minorantes de $\mathbb{R}^+$ formam o intervalo $]-\infty, 0]$, que tem máximo 0. Este máximo não é no entanto o mínimo de $\mathbb{R}^+$, porque $0 \notin \mathbb{R}^+$.

O *maior minorante* e o *menor majorante* do conjunto A, quando existem, dizem-se:

Definição 1.2.10. (Supremo e Ínfimo de A) Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- Se o conjunto dos majorantes de A tem *mínimo* s, então s diz-se o SUPREMO de A, e designa-se por $\sup A$.

- Se o conjunto dos minorantes de A tem *máximo* i, então i diz-se o ÍNFIMO de A, e designa-se por $\inf A$.

Com $A =]0, 1[$, temos então que $1 = \sup A$ e $0 = \inf A$. No caso do intervalo fechado $B = [0, 1]$, temos novamente $1 = \sup B$ e $0 = \inf B$, mas temos igualmente $1 = \sup B = \max B$ e $0 = \inf B = \min B$. Registamos a seguir algumas propriedades elementares, mas importantes, destas noções.

[11] Quais são os majorantes e os minorantes de $\emptyset$?

Teorema 1.2.11. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $i, s \in \mathbb{R}$.*

a) Se s é máximo de A então $s = \sup A$, e se i é mínimo de A então $i = \inf A$.

b) Se $s \in \mathbb{R}$ é majorante de A, então $s = \sup A$ se e só se, para qualquer $\epsilon > 0$, $V_\epsilon(s) \cap A \neq \emptyset$.

c) Se $i \in \mathbb{R}$ é minorante de A, então $i = \inf A$ se e só se, para qualquer $\epsilon > 0$, $V_\epsilon(i) \cap A \neq \emptyset$.

Demonstração. Demonstramos apenas b), como exemplo.

- Supomos primeiro que $s = \sup A$. Dado $\epsilon > 0$, observamos que existe algum elemento $x \in A$ tal que $s - \epsilon < x \leq s < s + \epsilon$, porque caso contrário $s - \epsilon$ seria majorante de A, e s não poderia ser o *menor* majorante. Concluímos assim que $V_\epsilon(s) \cap A \neq \emptyset$.
- Supomos agora que s é majorante de A, e $V_\epsilon(s) \cap A \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon > 0$. Dado $t < s$, tomamos $\epsilon = s - t$, e recordamos que $V_\epsilon(s) \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $x > s - \epsilon = t$. Em particular, t não é majorante de A, e s é certamente o *menor* majorante de A, i.e., $s = \sup A$.

□

1.3 Números Naturais e Indução

É talvez surpreendente reconhecer que é possível, a partir dos axiomas já apresentados, *definir* os números NATURAIS, e *demonstrar* o clássico PRINCÍPIO DE INDUÇÃO. Note-se que, de um ponto de vista intuitivo, as seguintes propriedades do conjunto $\mathbb{N}$ são evidentes:

$$\text{(i) } 1 \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{N}.$$

É igualmente evidente que $\mathbb{N}$ não é o *único* subconjunto de $\mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades em (i). Por exemplo, os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^+$ e o próprio $\mathbb{R}$ todos satisfazem a propriedade (i), se nela substituirmos a referência a $\mathbb{N}$ pela referência ao conjunto apropriado. A título de ilustração, e no caso de $\mathbb{Q}$, temos certamente que

$$\text{(i) } 1 \in \mathbb{Q} \text{ e } n \in \mathbb{Q} \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{Q}.$$

Os conjuntos que satisfazem a propriedade (i) dizem-se:

Definição 1.3.1. (Conjuntos Indutivos) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se INDUTIVO se e só se satisfaz as seguintes duas condições:

$$\text{(i) } 1 \in A \quad \text{e} \quad \text{(ii) } a \in A \Rightarrow (a + 1) \in A\ .$$

Um momento de reflexão sugere que os números naturais, não sendo o *único* conjunto indutivo, estão *contidos* em qualquer conjunto indutivo, e formam por isso o MENOR CONJUNTO INDUTIVO em $\mathbb{R}$. A seguinte definição formaliza esta ideia:

Definição 1.3.2. (Números Naturais) O conjunto dos NÚMEROS NATURAIS designa-se por $\mathbb{N}$, e é dado por

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{R} : \ n \text{ pertence a qualquer subconjunto indutivo de } \mathbb{R}\}\,.$$

O conjunto dos NÚMEROS INTEIROS é $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$, onde $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^- = \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}$. O conjunto dos NÚMEROS RACIONAIS é $\mathbb{Q}$, onde

$$\mathbb{Q} = \{n/m : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}.$$

O "Princípio de indução matemática" passa a ser assim mais um *teorema* da teoria que aqui desenvolvemos:

Teorema 1.3.3. (Princípio de Indução Matemática)

a) $\mathbb{N}$ *é o* MENOR CONJUNTO INDUTIVO *em* $\mathbb{R}$*, ou seja,*

  (i) Se $A \subset \mathbb{R}$ *é indutivo então* $\mathbb{N} \subset A$*, e*

  (ii) $\mathbb{N}$ *é indutivo.*

b) Em particular, se $A \subset \mathbb{N}$ *é indutivo então* $A = \mathbb{N}$*.*

Dem. A afirmação (i) da a) é evidente: Por definição de $\mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$ e A é indutivo então $n \in A$, ou seja, $\mathbb{N} \subset A$.
Para verificar que $\mathbb{N}$ é indutivo, notamos que

- $1 \in \mathbb{N}$, porque 1 pertence claramente a *qualquer* conjunto indutivo.
- Se $n \in \mathbb{N}$ e A é indutivo, então $n \in A$, porque os naturais pertencem por definição a qualquer conjunto indutivo. Segue-se que $n + 1 \in A$, porque A é indutivo. Como A é um conjunto indutivo *arbitrário*, concluímos que $n + 1$ está em *todo e qualquer* conjunto indutivo, pelo que $n + 1 \in \mathbb{N}$, mais uma vez por definição de $\mathbb{N}$.

  Em resumo, $1 \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{N}$ é um conjunto indutivo.

A afirmação em b) é também imediata. Como A é indutivo, temos $\mathbb{N} \subset A$, de a). Como por hipótese $A \subset \mathbb{N}$, é óbvio que $A = \mathbb{N}$.

$\square$

É intuitivamente evidente que

$$\mathbb{N} = \{1\,,\ 2 = 1{+}1\,,\ 3 = 2{+}1 = (1{+}1){+}1\,,\ 4 = 3{+}1 = ((1{+}1){+}1){+}1\,,\ \ldots\}\,.$$

Veremos adiante como esta ideia pode ser formulada mais rigorosamente, dizendo essencialmente que os números naturais são as *somas com um número finito (mas arbitrário) de parcelas, cada uma das quais é igual a* 1.

O Princípio da Indução Matemática do teorema 1.3.3 é a base da técnica de demonstração que conhecemos como *Método de Indução Matemática*. Recorde-se que, sendo $P(n)$ uma determinada proposição ou propriedade que se pretende mostrar verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$, este método consiste em

- Verificar que a afirmação $P(1)$ é verdadeira, e
- Mostrar que, para *qualquer* $n \in \mathbb{N}$, e se $P(n)$ é verdadeira, então

$$P(n+1) \text{ é igualmente verdadeira.}$$

Concluídos com sucesso estes dois passos, estabelecemos que

$$P(n) \text{ é verdadeira, para } \textit{qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.3.4. (Ficha 2, I 1.(a)) Consideremos a seguinte afirmação, que queremos mostrar ser verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(i) } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Neste caso, a afirmação em (i) é $P(n)$, ou seja, $P(n)$ afirma que, para o natural n, a soma dos naturais([12]) de 1 até n é dada por $n(n+1)/2$. Pelo Método de Indução Matemática, a prova faz-se em dois passos.

- $P(1)$ é verdadeira:

  Se $n = 1$, a soma $1 + 2 + \cdots + n$ reduz-se a um único termo igual a 1. Por outro lado, quando $n = 1$, temos $n(n+1)/2 = 1 \cdot (1+1)/2 = 1$.

- Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é também verdadeira:

  $P(n+1)$ é obtida de $P(n)$ por uma substituição imediata, e afirma que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

[12] Veremos imediatamente a seguir como definir com mais exactidão noções como a "soma dos naturais de 1 até n".

A chamada *hipótese de indução* é $P(n)$, que sabemos ser

$$\text{Para } o \text{ natural } n,\ 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2}+(n+1), \text{usando } P(n). \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

o que estabelece $P(n+1)$.

Concluímos assim que

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \text{para } \textit{qualquer} \text{ natural } n.$$

Para reconhecer que o Método de Indução Matemática é uma consequência do Princípio de Indução Matemática, basta notar que qualquer afirmação $P(n)$ tem associado o conjunto dos naturais para os quais $P(n)$ é verdadeira, ou seja, o conjunto

$$A=\{n\in\mathbb{N} : P(n) \text{ é verdade}\}.$$

O propósito da demonstração por indução é concluir que $P(n)$ é verdadeiro para qualquer n, ou seja, concluir que $A=\mathbb{N}$. Repare-se agora que

- Provar $P(1)$ é mostrar que $1\in A$, e
- Mostrar que $(P(n)\Rightarrow P(n+1))$ é verificar que $(n\in A\Rightarrow (n+1)\in A)$.

Dito doutra forma, o Método de Indução Matemática *consiste em mostrar que o conjunto A é indutivo*. Aplicado com sucesso, e tendo em conta que $A\subset\mathbb{N}$, a conclusão "$A=\mathbb{N}$" é uma aplicação directa do teorema 1.3.3.

Muitas das propriedades dos naturais que estamos habituados a considerar como óbvias podem ser demonstradas pelo método de indução, e enunciamos aqui algumas, a título de exemplo:

Teorema 1.3.5. *O conjunto $\mathbb{N}$ goza das seguintes propriedades:*

a) Fecho em relação à adição e produto*: $n,m\in\mathbb{N}\Rightarrow n+m, n\cdot m\in\mathbb{N}$.*

b) O menor natural*: 1 é o mínimo de $\mathbb{N}$.*

c) Diferença em $\mathbb{N}$*: Se $n,m\in\mathbb{N}$ e $n>m$ então $n-m\in\mathbb{N}$.*

d) DISTÂNCIA ENTRE NATURAIS*: Se $n, m \in \mathbb{N}$ então $n > m \Rightarrow n \geq m+1$. Em particular, $n \neq m \Rightarrow |n - m| \geq 1$.*

e) SUPREMO E MÁXIMO*: Se $A \subset \mathbb{N}$ tem supremo $s \in \mathbb{R}$, então s é natural, e é o máximo de A.*

f) PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO*: Se $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ então A tem mínimo.*

Demonstração. Apenas esboçamos os argumentos que são necessários, deixando a sua finalização como exercício.

a): Não é óbvio como se pode provar a afirmação a) por indução, em particular por envolver *dois* naturais. Supomos para isso $n \in \mathbb{N}$ *fixo*, e consideramos o conjunto $A_n = \{m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}\}$. Demonstre agora, *por indução em* m, que qualquer natural $m \in A_n$. Use um argumento análogo para o produto.

b): Considere o conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Demonstre por indução em n que qualquer natural $n \in B$, ou seja, $B = \mathbb{N}$.

c): Este é um exemplo interessante de indução "dupla". Considere a afirmação:

$$P(n, m) = \text{“}n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n > m \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}''$$

Proceda como se segue:

- Prove $P(n, 1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ por indução em n (mostre que se $n \in \mathbb{N}$ então $n = 1$ ou $n - 1 \in \mathbb{N}$).
- Suponha que, para um dado m, $P(n, m)$ é verdadeira para *qualquer* $n \in \mathbb{N}$, e mostre que $P(n, m + 1)$ é também verdadeira para *qualquer* $n \in \mathbb{N}$.
- Conclua que $P(n, m)$ é verdadeira para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$.

d): Se $n > m$ então $n - m \in \mathbb{N}$, logo $n - m \geq 1$, ou seja, $n \geq m + 1$.

e): Seja $s = \sup A$, e note-se que existe $n \in A$ tal que $s - 1 < n \leq s$, porque caso contrário $s - 1$ seria majorante de A, o que é impossível. Se $n < s$, e pela mesma razão, existe um natural $m \in A$ tal que $s - 1 < n < m \leq s$, e portanto $m - n < 1$, o que é impossível de c) e b). Concluímos assim que $n = s$, donde $s \in \mathbb{N}$.

f): Considere a afirmação $P(n) =$ "Se $A \subset \mathbb{N}$ e $A \cap [1, n] \neq \emptyset$ então A tem mínimo". Para demonstrar esta afirmação por indução em n, comece por observar que é óbvia para $n = 1$, porque nesse caso $1 \in A$. É interessante descobrir porque razão $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$!

□

Deixamos como exercício estabelecer as propriedades algébricas básicas de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, com base nos axiomas já apresentados.

Teorema 1.3.6. *$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são fechados relativamente à soma e ao produto, e*

a) Substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}^+$ por $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ nos axiomas 1.1.2 e 1.2.1, então $\mathbb{Z}$ satisfaz 1.2.1 e as propriedades 1 a 5 de 1.1.2.

b) Substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}^+$ por $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ nos axiomas 1.1.2 e 1.2.1, então $\mathbb{Q}$ satisfaz 1.1.2 e 1.2.1.

1.4 Definições por Recorrência

Existem múltiplas entidades matemáticas que são introduzidas com recurso às chamadas *Definições por Recorrência*, que estão directamente ligadas ao Princípio de Indução. Talvez o caso mais usual seja o de *potência de expoente natural* n, designada por x^n, onde podemos supor, por agora, que $x \in \mathbb{R}$. Estas potências são informalmente descritas como "produtos com n factores, todos iguais a x"([13]), usando nesta descrição um nível de rigor comparável ao que acabámos de usar para falar da "soma de todos os naturais de 1 a n". A sua definição mais rigorosa pode ser feita como se segue:

- Se $n = 1$, então $x^n = x^1 = x$, e
- Se $n \geq 1$, então $x^{n+1} = x^n \cdot x$.

As propriedades usuais das potências, em particular as identidades

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}, (x^n)^m = x^{nm} \text{ e } x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$$

podem e devem ser demonstradas por indução, e são válidas para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.([14])

Analogamente, e designando por S_n a dita "soma de todos os naturais de 1 a n", podemos definir S_n por

- Se $n = 1$, então $S_n = S_1 = 1$, e,
- Se $n \in \mathbb{N}$, então $S_{n+1} = S_n + (n+1)$.([15])

[13] Não se segue daqui que seja necessário calcular $n-1$ produtos para determinar x^n. Quantas multiplicações são necessárias para calcular, por exemplo, 2^{100}?

[14] Quando $x \neq 0$ definimos igualmente x^n quando $n \leq 0$ é um inteiro. Para $n = 0$ tomamos $x^0 = 1$ e para $n < 0$ fazemos $x^n = (x^{-1})^{-n}$, onde é claro que $-n \in \mathbb{N}$. As propriedades acima são na verdade válidas para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$, desde que $x \cdot y \neq 0$.

[15] Repare-se que foram exactamente estas as propriedades de S_n que usámos na anterior demonstração por indução.

Não nos detemos a formular com todo o rigor a relação entre o Princípio de Indução e as Definições por Recorrência, mas sublinhe-se que as usaremos com frequência, desde já para introduzir

Definição 1.4.1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o *símbolo de somatório*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \text{ se } n = 1, \text{ e } \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \text{ se } n > 1.$$

Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k + a_2 = a_1 + a_2\,,$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k + a_3 = a_1 + a_2 + a_3\,, \ \ldots\,.$$

Exemplo 1.4.2. A fórmula que provámos por indução no Exemplo 1.3.4, pode ser escrita usando o símbolo de somatório da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i.e. neste caso $a_k = k$ para $k = 1, \ldots, n$).

Exemplo 1.4.3. Nada impede que os *termos* do somatório sejam constantes. Note-se que se $a_k = 1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ então

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Esta afirmação pode ser demonstrada por indução, e mostra que, como anunciámos atrás, os naturais são as somas finitas com parcelas iguais a 1, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{\sum_{k=1}^{n} 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

Este facto torna ainda mais intuitivamente evidente que $\mathbb{N}$ *é fechado em relação à soma e ao produto*, i.e.,

$$n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + m, n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

Claro que, em última análise, mesmo esta afirmação elementar requer demonstração, que deve ser feita por indução.

Note-se que o símbolo utilizado para designar o índice do somatório, que nos exemplos acima é a letra "k", é efectivamente irrelevante. Por outras palavras, se mudarmos o índice do somatório em todas as suas ocorrências, a soma em questão não se altera. Em particular, uma mesma soma pode aparecer na notação de somatório de formas diferentes. Dizemos por isso que o índice do somatório é *mudo*. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ e } \sum_{k=1}^{5} k = \sum_{i=1}^{5} i = 15.$$

Teorema 1.4.4. (Propriedades do Somatório – Ficha 2, II 2.)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ *(prop. aditiva)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right), \ \forall\, c \in \mathbb{R}$ *(homogeneidade)*

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ *(prop. telescópica)*

Dem. (a) e (b) ficam como exercício. Provamos (c) por indução.
[$P(1)$]. Mostrar que a fórmula dada em (c) é válida quando $n = 1$, i.e. que

$$\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0\,,$$

o que é imediato a partir da Definição 1.4.1 do símbolo de somatório quando $n = 1$.
[$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k-1}) = a_{n+1} - a_0\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) + (a_{n+1} - a_{n+1-1}) && \text{(por definição)} \\
&= (a_n - a_0) + (a_{n+1} - a_n) && \text{(pela hipótese } P(n)\text{)} \\
&= a_{n+1} - a_0
\end{aligned}$$

□

Nem o Método de Indução, nem o Símbolo de Somatório, têm necessariamente que "começar" em $n = 1$. Ambos admitem generalizações simples, tendo como ponto de partida um dado $m \in \mathbb{Z}$. O caso $m = 0$ é ilustrado no exemplo seguinte, mas na verdade todos os casos se podem reduzir ao originalmente considerado, por simples "substituições de variáveis", do tipo:

$$\sum_{k=2}^{4} 2^k = \sum_{i=1}^{3} 2^{i+1} = \sum_{j=0}^{2} 2^{j+2} = 2^2 + 2^3 + 2^4.$$

Exemplo 1.4.5. (Ficha 2, II. 6) Vamos neste exemplo mostrar que, para qualquer $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, $r \neq 0$ e qualquer $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,. \tag{1.1}$$

Usaremos o Método de Indução começando em $n = 0$.
$[P(0)]$. Mostrar que a fórmula (1.1) é válida quando $n = 0$, i.e., que

$$\sum_{k=0}^{0} r^k = \frac{1 - r^1}{1 - r}$$

o que é verdade (ambos os termos são iguais a 1, porque $r^0 = 1$).
$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e um determinado } n \in \mathbb{N}_0\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\,, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} && \text{(por def. de somatório)} \\
&= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} && \text{(pela hipótese } P(n)\text{)} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\,.
\end{aligned}$$

Note-se de passagem que alguns dos exemplos acima reflectem propriedades de "progressões aritméticas" ou "geométricas". A título de exemplo, a progressão geométrica de 1º termo a e razão r é definida por:

$$x_1 = a \text{ e, para } n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n \cdot r$$

A soma dos seus n primeiros termos é dada por

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \text{ desde que } r \neq 1.$$

1.5 O Axioma do Supremo

É fácil fazer afirmações que são verdadeiras para $\mathbb{R}$ e falsas para $\mathbb{Q}$. Um exemplo clássico é

$$\text{A equação } x^2 = 2 \text{ tem soluções.}$$

NÃO existem soluções de $x^2 = 2$ com $x \in \mathbb{Q}$, razão pela qual dizemos que $\sqrt{2}$ é IRRACIONAL, ou seja, é um número real que não é racional, e este é mais um facto já conhecido dos matemáticos da Grécia Antiga, que aliás criou difíceis problemas de natureza filosófica aos seus descobridores.

Para mostrar que a equação $x^2 = 2$ *não tem soluções* $x \in \mathbb{Q}$, usamos uma técnica de demonstração conhecida por "*redução ao absurdo*", ou por "*contradição*". Esta técnica resume-se a *supor a negação* do que queremos demonstrar, (neste caso, começamos por supor que *existe* $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$), e *deduzir daí uma contradição lógica.* Segue-se que a negação do que queremos provar só pode ser falsa, ou seja, o que queremos provar é verdadeiro.

Supomos então que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. Sabemos que existem inteiros n e m tais que $x = n/m$, e podemos supor que $n, m \in \mathbb{N}$, porque $n \neq 0$, $m \neq 0$ e o sinal algébrico de n e m é irrelevante na equação em causa. Temos então([16])

$$\text{Existem } n, m \in \mathbb{N} \text{ tais que } (n/m)^2 = 2, \text{ donde } n^2 = 2m^2.$$

Podemos igualmente supor que a fracção n/m está simplificada (reduzida), ou seja, n e m são *coprimos, o que quer dizer que não têm quaisquer factores comuns além dos triviais* ± 1. Na verdade, se a equação tem soluções n' e m' e o máximo divisor comum destes naturais é d, então $n' = dn$ e $m' = dm$, e é claro que n e m são ainda soluções da equação, mas agora coprimos.

Temos então que existem naturais coprimos n e m tais que $n^2 = 2m^2$. É evidente que n^2 é PAR, e é fácil verificar que tal só é possível se n for

[16] As equações como $n^2 = 2m^2$, em que as incógnitas são *inteiros*, dizem-e *equações diofantinas*. Alguns dos problemas mais difíceis da Matemática são na realidade sobre equações diofantinas, em particular a questão do famoso "*Último Teorema de Fermat*", cuja resolução demorou mais de três séculos.

também par (porque o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar). Então $n = 2k$, e a equação pode escrever-se nas formas equivalentes

$$n^2 = 2m^2 \iff (2k)^2 = 2m^2 \iff 4k^2 = 2m^2 \iff 2k^2 = m^2.$$

Segue-se que m^2 é também par, e concluímos analogamente que m é par. *Mas n e m são coprimos, e portanto não podem ser ambos pares.* Esta contradição mostra que a nossa suposição inicial é falsa, e portanto mostra que a equação $n^2 = 2m^2$ *não pode ter soluções em* $\mathbb{N}$, e $x^2 = 2$ não pode ter soluções em $\mathbb{Q}$.

O argumento anterior permite-nos concluir que, *se a equação $x^2 = 2$ tem soluções $x \in \mathbb{R}$*, então essas soluções são *irracionais*, mas nada adianta sobre a EXISTÊNCIA ou não de soluções irracionais. Como podemos *demonstrar* que essas soluções existem? *Certamente que esse facto não pode ser deduzido dos axiomas já apresentados, que se aplicam igualmente a $\mathbb{Q}$ e a $\mathbb{R}$.*

De um ponto de vista intuitivo, a existência do número real $\sqrt{2}$ é fácil de entender, se assumirmos como dado que *qualquer dízima infinita, periódica ou não, representa um número real.* Na verdade, o cálculo numérico aproximado de $\sqrt{2}$ nada mais é do que a expressão dessa ideia. Atente-se nas aproximações([17])

n	a_n	b_n	a_n^2	b_n^2
1	1	2	1	4
2	$1,4$	$1,5$	$1,96$	$2,25$
3	$1,41$	$1,42$	$1,98\cdots$	$2,01\cdots$
4	$1,414$	$1,415$	$1,9993\cdots$	$2,002\cdots$
5	$1,4142$	$1,4143$	$1,99996\cdots$	$2,0002\cdots$

Todos aceitamos que este processo *converge* para um único número real, que designamos $\sqrt{2}$, e consideramos "óbvio" que $\sqrt{2} = 1,4142\cdots$. Mas o que este processo mostra é apenas que existem números (sempre racionais!)

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \cdots, \text{ e } b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots,$$

tais que

- $a_n^2 < 2 < b_n^2$,
- $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, e
- $1 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq 2$.

[17] A tabela apresenta na linha n, na posição a_n, o MAIOR racional com $n-1$ casas decimais tal que $a_n^2 < 2$. Existem algoritmos muito mais *eficientes* para calcular aproximações de $\sqrt{2}$. Experimente-se por exemplo a sucessão $x_1 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$.

Como vimos, este processo de cálculo não pode terminar num número *finito* de passos, porque nunca pode conduzir a igualdades do tipo $a_n^2 = 2$ ou $b_n^2 = 2$.

Para uma análise menos superficial deste procedimento, consideramos os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ e o conjunto que resulta da intersecção de todos eles, ou seja,

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}\}$$

Parece mais uma vez intuitivamente "óbvio" que $x = 1,4142\cdots$ é o *único* real x que satisfaz $a_n < x < b_n$ para qualquer n, ou seja, $\{x\} = I$, e que só podemos ter $x^2 = 2$. É claro que estas afirmações não podem ser por enquanto *provadas*, já que, como temos dito, todos os axiomas que introduzimos se aplicam indistinitamente a $\mathbb{R}$ e a $\mathbb{Q}$, mas sugerem pelo menos um esboço do caminho a percorrer:

(1) Estabelecer que $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, e

(2) Provar que $x \in I \iff x^2 = 2$.

O grande matemático George Cantor, criador da Teoria dos Conjuntos, reconheceu em (1) uma propriedade muito relevante da recta real $\mathbb{R}$, hoje conhecida como o PRINCÍPIO DE ENCAIXE. Declara-se neste princípio que se intervalos fechados não-vazios $I_1, I_2, \cdots$ formam uma família *decrescente* (ou seja, se cada intervalo I_n contém o intervalo seguinte I_{n+1}), então existem pontos que são comuns a *todos* os intervalos dessa família:

$$I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset \text{ e } I_{n+1} \subset I_n, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Mesmo o Princípio de Encaixe não resolve completamente a questão da existência de uma solução real de $x^2 = 2$! Sabemos que, no exemplo considerado, temos

$$(3)\ b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}}, 1 \leq a_n < b_n \leq 2 \text{ e } a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

Supondo que o Princípio de Encaixe é válido, podemos concluir que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n < x < b_n \text{ donde } a_n^2 < x^2 < b_n^2, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Cálculos elementares mostram que neste caso

$$|x^2 - 2| \leq b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \leq \frac{4}{10^{n-1}}, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

A conclusão $x^2 = 2$ segue-se de observar, por exemplo, que o ínfimo do conjunto formado pelas fracções $\frac{3}{10^n}$ é zero, mas *mesmo esta ideia tão "óbvia" não é consequência dos axiomas já apresentados.* Na realidade, e utilizando aqui informalmente a noção de limite de uma sucessão, os axiomas apresentados não permitem ainda provar que $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$!

Esbarramos com estas mesmas dificuldades quando tentamos mostrar que um *qualquer conjunto majorado e não-vazio tem supremo*, observação que podemos chamar de Princípio do Supremo. É fácil reconhecer que o Princípio do Supremo é relevante para o estudo da equação $x^2 = 2$, em particular porque *implica* o Princípio de Encaixe, como passamos a mostrar.

Suponha-se que os intervalos fechados não-vazios $I_n = [a_n, b_n]$ formam uma sucessão decrescente, e considere-se o conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ formado pelos extremos inferiores dos intervalos I_n. Atente-se a que

- $A \neq \emptyset$, e tem majorantes, porque *qualquer* b_n é majorante de A.
- Se o Princípio do Supremo é válido, então existe $s = \sup A$.
- É evidente que $a_n \leq s$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, porque $s = \sup A$.
- $s \leq b_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, porque s é o *menor* dos majorantes.

É portanto claro que $a_n \leq s \leq b_n$, i.e., $s \in I_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o que prova que $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Por outras palavras, o Princípio do Supremo implica o Princípio do Encaixe, como dissémos.

Não é imediatamente óbvio se o Princípio de Encaixe implica por sua vez o Princípio do Supremo, ou seja, se os dois Princípios são logicamente equivalentes. Suponha-se para isso que A é um qualquer conjunto majorado não-vazio, e o Princípio de Encaixe é válido.

Fixamos um qualquer elemento $a \in A$, e um majorante b de A. É óbvio que, se existe $s = \sup A$, então $s \in [a, b]$, porque $a \leq s \leq b$.

Passamos a definir (por recorrência!) uma sucessão de intervalos "encaixados" que contém $\sup A$, se este existir. Tomamos primeiro $a_1 = a, b_1 = b$ e $I_1 = [a_1, b_1]$. Observe-se que

(1) $I_1 \cap A \neq \emptyset$ e b_1 é majorante de A.

O intervalo I_2 resulta de dividir I_1 pelo seu "ponto médio" $c_1 = (a_1 + b_1)/2$, e escolher um dos subintervalos resultantes. A escolha é feita observando que *uma das seguintes alternativas é sempre verdadeira:*

(2) Existem pontos de A no intervalo $[c_1, b_1]$, ou

(3) $A \cap [c_1, b_1] = \emptyset$, donde $x < c_1$ para qualquer $x \in A$, e c_1 é majorante de A.

No caso (1), tomamos $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Em (2), fazemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Em ambos os casos, e com $I_2 = [a_2, b_2]$, temos que

$$(4)\ I_2 \cap A \neq \emptyset \text{ e } b_2 \text{ é majorante de } A.$$

Podemos prosseguir indefinidamente este processo, obtendo assim uma sucessão de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ "encaixados", tais que

$$b_n \text{ é majorante de } A,\ I_n \cap A \neq \emptyset \text{ e } b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}.$$

Se o Princípio de Encaixe é válido então existe $x \in \cap_{n=1} I_n$, mas não podemos concluir que x é o supremo de A sem mostrar que $b_n - a_n \to 0$, o que é um problema análogo ao que encontrámos no estudo da equação $x^2 = 2$. Esta observação sugere que o Princípio do Supremo contém mais informação sobre os números reais, e não é por isso totalmente surpreendente que seja essa a afirmação tradicionalmente usada para completar a axiomática dos reais:

Axioma 1.5.1 (Axioma do Supremo)**.** *Se $A \subset \mathbb{R}$ é majorado e não-vazio então A tem supremo.*

Como já vimos, e partindo deste axioma, podemos provar o Princípio de Encaixe:

Teorema 1.5.2 (Princípio de Encaixe)**.** *Se $I_n = [a_n, b_n] \neq \emptyset$ e $I_{n+1} \subset I_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ então*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Podemos igualmente demonstrar algumas propriedades de $\mathbb{N}$, que apesar de elementares envolvem, como já nos apercebemos, alguma subtileza na sua análise.

Teorema 1.5.3. *O conjunto dos naturais não é majorado em $\mathbb{R}$. Temos em particular que*

a) Se $\epsilon > 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$.

b) Propriedade Arquimediana: Se $a, b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Demonstração. Argumentamos novamente por "redução ao absurdo", supondo que $\mathbb{N}$ é majorado. Temos então

- $\mathbb{N}$ tem supremo $s \in \mathbb{R}$, de acordo com o axioma 1.5.1.
- $s - 1 < s$, logo $s - 1$ *não* é majorante de $\mathbb{N}$.
- Como $s-1$ não é majorante de $\mathbb{N}$, existe *algum* $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > s-1$.

- Então $n+1 \in \mathbb{N}$ e $n+1 > s = \sup \mathbb{N}$, o que é absurdo.

Tanto a) com b) são aplicações directas desta ideia.

a): Como $\mathbb{N}$ não é majorado em $\mathbb{R}$ e $1/\epsilon \in \mathbb{R}$, existe pelo menos um natural $n > 1/\epsilon$, ou seja, $1/n < \epsilon$.

b): Mais geralmente, como $\mathbb{N}$ não é majorado em $\mathbb{R}$ e $b/a \in \mathbb{R}$, existe pelo menos um natural $n > b/a$, ou seja, $na > b$.

□

O próximo teorema indica outras propriedades que são na verdade consequência sobretudo do Axioma do Supremo.

Teorema 1.5.4. *Qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ não-vazio e majorado em $\mathbb{R}$ tem* MÁXIMO. *Em particular,*

a) Parte inteira de x: Se $x \in \mathbb{R}$ existe um único inteiro n, dito a parte inteira de x, *aqui designada* $\text{int}(x)$, *tal que* $\text{int}(x) \leq x < \text{int}(x) + 1$.

b) Densidade dos Racionais: Se $a \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ então $V_\epsilon(a) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Demonstração. Qualquer conjunto $I \subset \mathbb{N}$ não-vazio e majorado em $\mathbb{R}$ tem SUPREMO, pelo axioma do supremo. Segue-se de 1.3.5 que o supremo de I é o seu máximo.

a): Supomos primeiro que $x \geq 0$, e consideramos $I = \{m \in \mathbb{N} : m \leq x\}$. Se I é vazio então $0 \leq x < 1$, e $\text{int}(x) = 0$. Caso contrário, I tem máximo m, como acabámos de ver. Temos assim que

$$m \leq x < m+1 \text{ e } \text{int}(x) = m.$$

Quando $x < 0$, observamos que se $x \in \mathbb{Z}$ então $x = \text{int}(x)$. Caso contrário, é fácil verificar que $\int(x) = -\text{int}(-x) - 1$.

b): Seja $n = \text{int}(x)$, donde $0 \leq x - n < 1$, e m um natural m tal que $1/m < \epsilon$. Seja ainda $k = \text{int}(m(x-n))$, donde $0 \leq k < m$. Temos então

$$0 \leq m(x-n) - k < 1 \Rightarrow 0 \leq x - (n + k/m) < 1/m < \epsilon$$

É claro que $q = n + k/m = (mn+k)/m$ é racional, e $|x - q| < \epsilon$.

□

Exercícios

1. Recorrendo ao Método da Indução Matemática, mostre que $\mathbb{Z}$ é fechado para a adição e subtracção, e que $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição, multiplicação, subtracção e divisão.

2. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, satisfaz todos os Axiomas de Corpo (Propriedades 1-5) e de Ordem (Propriedades 1.2.1 e 1.2.1).

3. Verifique que se $p \in \mathbb{N}$ e p^2 é um número par então p também é par.

4. *(Propriedade do Ínfimo)*
   Mostre que qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ minorado e não-vazio tem ínfimo.

Capítulo 2

Limites e Continuidade

2.1 Funções Reais de Variável Real

A noção de *função* é uma das mais gerais da Matemática, e é normalmente introduzida em termos abstractos, no contexto da Teoria dos Conjuntos. De um ponto de vista meramente intuitivo, e dados conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é simplesmente uma *regra* que permite, pelo menos "em princípio", associar um determinado elemento $y \in B$ a cada elemento $x \in A$. O aspecto fundamental aqui é que a regra é aplicável a *qualquer* elemento de A, e para cada elemento $x \in A$ identifica um *único* elemento $y \in B$, que se diz a *imagem* de x (pela função f). Escrevemos por isso $y = f(x)$.

A seguinte terminologia deve ser conhecida:

- A é o DOMÍNIO de f,
- B é o CONTRADOMÍNIO de f,
- Sendo $A' \subset A$, o conjunto $\{f(x) : x \in A'\}$, formado por *todos* os pontos de B que são imagens de algum ponto de A' é a IMAGEM (DIRECTA) de A' por f, e designa-se $f(A')$. O conjunto $f(A)$ diz-se simplesmente a IMAGEM de f, e designa-se por $Im(f)$.
- Sendo $B' \subset B$, o conjunto $\{x \in A : f(x) \in B'\}$, formado pelos pontos de A cuja imagem está em B', é a IMAGEM INVERSA de B' por f, e designa-se $f^{-1}(B')$.

Observações

(1) Temos $f(A) \subset B$, mas é possível que $f(A) \neq B$. Quando $f(A) = B$, dizemos que f é uma função SOBREJECTIVA. Este é o caso em que a equação $y = f(x)$ tem *sempre* soluções $x \in A$, para qualquer $y \in B$.

(2) Temos $f^{-1}(B) = A$.

(3) É sempre verdade que $f^{-1}(f(A')) = A'$ e $f(f^{-1}(B')) \subset B'$ para quaisquer $A' \subset A$ e $B' \subset B$, mas podemos ter $f(f^{-1}(B')) \neq B'$.

(4) Se $y \in B$, a imagem inversa $f^{-1}(\{y\})$ contém todas as soluções $x \in A$ da equação $y = f(x)$. Se para qualquer $y \in B$ existe *no máximo* um elemento $x \in A$ na imagem inversa $f^{-1}(\{y\})$, dizemos que f é INJECTIVA. Por outras palavras, a função é injectiva quando, para cada $y \in B$, a equação $y = f(x)$ tem no máximo uma solução.

(5) Quando $f : A \to B$ é injectiva e sobrejectiva, então diz-se BIJECTIVA. Neste caso, a equação $y = f(x)$ tem uma única solução para cada $y \in B$, e existe uma função $g : B \to A$, dita a INVERSA de f, tal que $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. A inversa de f designa-se por vezes por f^{-1}.

Estudamos sobretudo funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$, e que se dizem por isso FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL. Estas funções podem ser dadas por expressões simples, mas podem igualmente corresponder a regras complexas de atribuição de valores, que em termos práticos podem redundar em cálculos extremamente difíceis de executar.

Exemplos 2.1.1.

(1) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ não é sobrejectiva nem injectiva. A sua imagem $Im(f) = [1, \infty[$. O cálculo desta função envolve apenas duas operações (um produto e uma soma).

(2) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3+1$ é sobrejectiva e injectiva, ou seja, é bijectiva. O cálculo desta função envolve apenas três operações (dois produto e uma soma). A sua função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

(3) A *função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um exemplo clássico criado por Oliver Heaviside, um engenheiro electrotécnico inglês dos séculos XIX-XX. É dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq 0, \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

(4) A *função de Dirichlet* $\mathrm{dir} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é outro exemplo clássico introduzido no século XIX pelo matemático com o mesmo nome. É dada por

$$\mathrm{dir}(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é racional}, \\ 0, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

O cálculo desta função pode ser mais complicado, porque requer determinar se x é racional ou irracional. Repare-se que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais do que um ponto, então é claro que $\mathrm{dir}(I) = \{0, 1\}$.

(5) Alguns dos problemas mais interessantes da Matemática contemporânea estão ligados à função que *conta*, para cada $x \in \mathbb{R}$, os números primos no intervalo $]-\infty, x]$. É usual designar esta função por π. A título de ilustração, $\pi(10) = 4$, porque os primos $p \leq 10$ são 4: 2, 3, 5, e 7. Já $\pi(23) = 9$, porque os números primos $p \leq 23$ são 9: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23. O seu cálculo exacto é muito difícil quando x é "grande", mas como existe um número infinito de primos podemos pelo menos dizer que $Im(\pi) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.([1])

Sendo o domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário, o caso especial em que $D = \mathbb{N}$ corresponde às funções que convencionamos chamar SUCESSÕES:

Definição 2.1.2. Uma SUCESSÃO REAL é uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $u(n)$ é o TERMO GERAL, ou TERMO DE ORDEM n, da sucessão u, representando-o normalmente por u_n.

Usaremos qualquer um dos símbolos u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) para representar uma mesma sucessão real.

Exemplos 2.1.3.

(1) $u_n = 3$ é o termo geral da sucessão $u = (3, 3, 3, \ldots)$.

(2) Se $u_n = 2 + 3n$ então $u = (5, 8, 11, \ldots)$.

(3) Se $u_n = 3 \cdot 2^n$ então $u = (6, 12, 24, \ldots)$.

(4) Uma PROGRESSÃO ARITMÉTICA é uma qualquer sucessão que satisfaz a condição $u_{n+1} = u_n + r$ (onde r é constante), para todo o $n \in \mathbb{N}$. O seu termo geral é $u_n = a + (n-1)r$, onde $a = u_1$ é o primeiro termo, e r é a RAZÃO. A sucessão $u_n = 2+3n$ do Exemplo (2) é uma progressão aritmética, com primeiro termo $a = 5$ e razão $r = 3$.

(5) Uma PROGRESSÃO GEOMÉTRICA é uma qualquer sucessão que satisfaz a condição $u_{n+1} = u_n \cdot r$ (r constante), para todo o $n \in \mathbb{N}$. O seu termo geral é $u_n = a \cdot r^{n-1}$, onde $a = u_1$ é o primeiro termo, e r é a RAZÃO. A sucessão $u_n = 3 \cdot 2^n$ do Exemplo (3) é uma progressão geométrica, com primeiro termo $a = 6$ e razão $r = 2$.

(6) É comum definir sucessões por recorrência. Um exemplo clássico é a SUCESSÃO DE FIBONACCI, dada por $u_1 = u_2 = 1$ e $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Note-se que $u = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$.

[1] Em Setembro de 2008, o maior número primo conhecido é o recém-descoberto "primo de Mersenne" $M_p = 2^p - 1$, onde $p = 43.112.609$. A representação decimal de M_p tem mais de 13 milhões de dígitos.

(7) Por vezes não se conhecem expressões "práticas" para o termo geral de uma sucessão, nem qualquer relação de recorrência para os seus termos. Um exemplo clássico é aqui o da sucessão de todos os números naturais primos, i.e., a sucessão $u = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots)$.

Sendo $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, e $A \subset D$, então f diz-se *majorada* (respectivamente *minorada*) em A se a imagem $f(A)$ é um conjunto majorado (respect., minorado). Por outras palavras,

- f é MAJORADA em A se e só se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para qualquer $x \in A$, e
- f é MINORADA em A se e só se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$, para qualquer $x \in A$.

Uma função que é simultaneamente majorada e minorada em A diz-se LIMITADA em A. O MÁXIMO e o MÍNIMO de f em A são, quando existem, o máximo e o mínimo de $f(A)$. O SUPREMO e o ÍNFIMO de f em A são o supremo e o ínfimo de $f(A)$, caso estes existam. Em todos os casos referidos, quando se omite a referência ao conjunto A entende-se que A é todo o domínio de f. Ilustrando estas ideias com os exemplos anteriores, notamos que

Exemplos 2.1.4.

(1) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ é minorada mas não é majorada (em $\mathbb{R}$). Tem mínimo, que é $f(0) = 1$.

(2) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 1$ não é minorada nem majorada em $\mathbb{R}$.

(3) As funções de Heaviside e de Dirichlet são limitadas, e têm máximo e mínimo (respectivamente 1 e 0).

(4) A função π tem mínimo 0, mas não é majorada. É claro que $\pi(x) \geq 0$, e que $\pi(x) = 0$ para qualquer $x < 2$.

Se $f : D \to \mathbb{R}$ então o conjunto $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in D \text{ e } y = f(x)\big\}$ é o GRÁFICO de f. É claro que o gráfico de f é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, ou seja, é uma figura plana, e é um poderoso auxiliar do estudo de f, porque permite interpretar e visualizar as propriedades de f como propriedades geométricas desta figura. Por exemplo, f tem minorante m e majorante M se e só se o seu gráfico está entre as linhas horizontais de equações $y = m$ e $y = M$. O conhecimento mesmo que aproximado do gráfico de f é por isso muito útil, o que não quer dizer que seja sempre fácil ou mesmo possível esboçá-lo com a necessária exactidão. Sublinhe-se aliás que a ideia intuitiva de que o gráfico de f é sempre uma "linha", mais ou menos "curva", está por vezes longe da realidade. Por exemplo, é difícil sustentar que o gráfico da função de Dirichlet deva ser considerado uma curva!

Se $f : A \to B$ tem uma inversa $f^{-1} : B \to A$, os pontos do gráfico de f^{-1} obtém-se dos pontos do gráfico de f simplesmente trocando as suas coordenadas. Por outras palavras, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e só se o ponto (b, a) está no gráfico de f^{-1}: *os pontos* (a, b) *e* (b, a) *são simétricos relativamente à recta* $y = x$*, pelo que o gráfico de* f^{-1} *resulta de reflectir o gráfico de* f *nesta recta.* A figura 2.8 ilustra este facto com as funções exponencial e logaritmo.

Exemplo 2.1.5. A função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = x^2$ não é injectiva em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ porque

$$p(x) = x^2 = (-x)^2 = p(-x).$$

No entanto, como a sua restrição ao intervalo $I = [0, +\infty[$ é estritamente crescente, temos que a sua *restrição* f a I, i.e., a função dada por $f(x) = p(x)$, mas com domínio I, é injectiva, e $f(I) = I$, como já observámos no Capítulo anterior. Tem assim inversa f^{-1} definida em I, que é naturalmente a função raíz quadrada, ou seja, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 2.1.

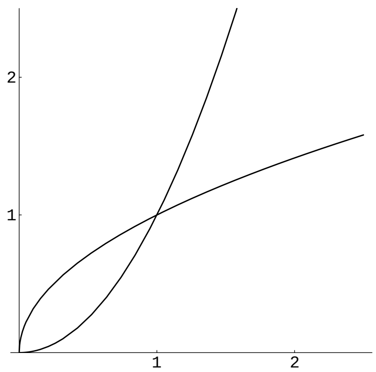


Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = x^2$ e da sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

A seguinte terminologia deve ser também conhecida:

Definição 2.1.6. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos então que

(1) f é CRESCENTE em $D' \subset D$ se e só se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, para quaisquer $x, y \in D'$. É ESTRITAMENTE crescente se, nas mesmas condições, se tem $f(x) < f(y)$.

(2) f é DECRESCENTE em $D' \subset D$ se e só se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, para quaisquer $x, y \in D'$. É ESTRITAMENTE decrescente se, nas mesmas condições, se tem $f(x) > f(y)$.

(3) f é MONÓTONA em $D' \subset D$ se e só se é crescente ou decrescente em D'.

(4) Supondo que o domínio $D \subset \mathbb{R}$ é simétrico em relação à origem, i.e., que $x \in D$ se e só se $-x \in D$, dizemos ainda que

   a) f é PAR se e só se $f(-x) = f(x)$, para qualquer $x \in D$.

   b) f é ÍMPAR se e só se $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$.

(5) Se $D = \mathbb{R}$, então f é PERIÓDICA de período T se e só se $T > 0$ e $f(x + T) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Deve notar-se em particular que f é par se e só se o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy (a recta $x = 0$), e é ímpar se e só se o seu gráfico é simétrico em relação à origem (o ponto $(0, 0)$). Neste último caso temos em particular que $f(0) = 0$.

Exemplos 2.1.7.

(1) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ é par. É crescente em $[0, \infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0]$.

(2) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e é ímpar.

(3) A função trigonométrica sen, definida em $\mathbb{R}$, é ímpar e periódica de período $T = 2\pi$. É estritamente crescente em qualquer intervalo da forma $[2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2]$.

(4) A função de Dirichlet é periódica, com período T, onde $T > 0$ é um qualquer número racional (porquê?). É também par, e não é monótona em nenhum intervalo com mais do que um ponto.

2.2 Exemplos de Funções

Referimos aqui alguns exemplos de funções que o leitor provavelmente já conhece. Em alguns casos, estas funções já podem ser definidas com bastante precisão, mas noutros casos essa definição requer um maior desenvolvimento da teoria, e só será dada posteriormente.

Definição 2.2.1 (Funções Polinomiais)**.** Se $f : D \to \mathbb{R}$ é dada por um polinómio, i.e., é da forma

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \text{, com } c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ para } x \in D,$$

então dizemos que f é POLINOMIAL (em D). Se $c_n \neq 0$, dizemos que n é o grau da função polinomial f. É claro que podemos ter $D = \mathbb{R}$.

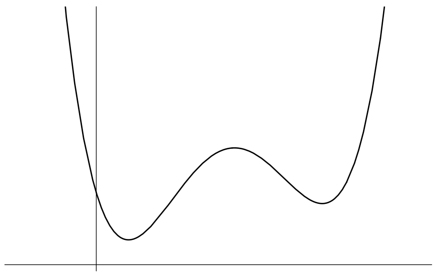


Figura 2.2: Gráfico de uma função polinomial de grau 4.

A Ficha 2 inclui diversos exercícios sobre propriedades das funções polinomiais. Deve recordar em particular que

- $f(\alpha) = 0$ se e só se $f(x) = q(x)(x-\alpha)$, onde q é uma função polinomial.
- Se f não é nula e tem grau n então a equação $f(x) = 0$ tem no máximo n soluções (ou seja, um polinómio de grau n tem no máximo n raízes).

A Figura 2.2 mostra o gráfico de uma função polinomial.

Definição 2.2.2 (Funções Racionais)**.** Se a função $f : D \to \mathbb{R}$ é dada por uma expressão da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinómios, para qualquer } x \in D,$$

dizemos que f é uma função RACIONAL. O domínio $D \subseteq \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, por razões óbvias.

Um exemplo simples é a função definida por $f(x) = 1/x$, cujo gráfico (uma hipérbole) está representado na Figura 2.3. Tanto o seu domínio como contradomínio são $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta função é ímpar, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ (mas não em todo o seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Note-se que qualquer função g da forma $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com $c \neq 0$, tem um gráfico semelhante, com a assímptota vertical em $x = -d/c$ e a assímptota horizontal em $y = a/c$. O domínio de g é $D = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.

As funções TRIGONOMÉTRICAS têm um papel fundamental na Matemática e nas suas aplicações. Começamos por recordar as suas clássicas descrições geométricas, que usam como sabemos a *circunferência unitária*, com equação $x^2 + y^2 = 1$. A figura 2.4 é a nossa referência básica. Não estamos ainda em condições de apresentarmos definições suficientemente rigorosas destas funções, e preferimos por isso enunciar um teorema que demonstraremos mais ainda, mas que utilizaremos desde já como base dos nossos argumentos sobre as funções trigonométricas.

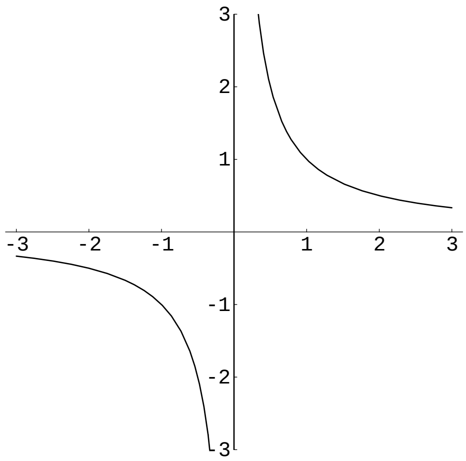


Figura 2.3: Gráfico da função racional $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$.

Teorema 2.2.3. *Existem funções* $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*

a) $\cos(0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ *e* $\cos(\pi) = -1$.

b) Se $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ *então* $\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$

c) Se $0 < \theta < \pi/2$ *então* $0 < \cos(\theta) < \operatorname{sen}(\theta)/\theta < 1$.

As afirmações feitas no teorema anterior, que como dissémos não podemos por enquanto demonstrar, têm uma interpretação geométrica simples, que deve ser entendida por todos:

- A *área* do sector circular OPX é metade do *comprimento* do arco de circunferência que une os pontos P e X. Em particular, a área do círculo unitário é π, e o comprimento da circunferência unitária é 2π.

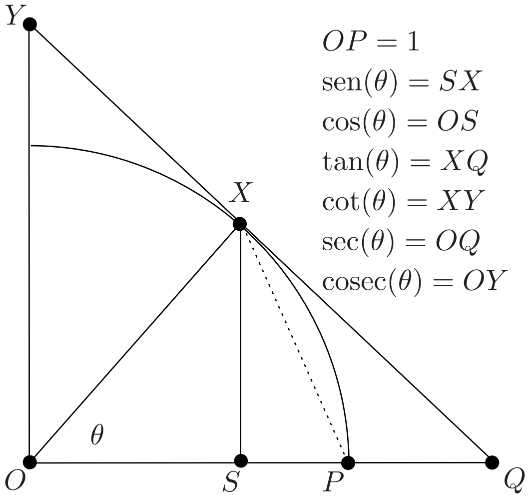
- O *comprimento* do arco de circunferência que une os pontos P e X é a medida do ângulo θ, entre OP e OX, e em *radianos*.

- A observação em b) resulta de notar que a distância entre os pontos X e Y na figura 2.5 pode ser calculada de duas maneiras distintas, o que conduz à igualdade:

$$(\cos\theta - \cos\phi)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi)^2 = (1 - \cos(\theta - \phi))^2 + \operatorname{sen}^2(\theta - \phi)$$

- A observação em c) resulta de comparar as áreas dos triângulos OPX e OQX e do sector circular OPX, para obter as desigualdades

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$



$$OP = 1$$
$$\operatorname{sen}(\theta) = SX$$
$$\cos(\theta) = OS$$
$$\tan(\theta) = XQ$$
$$\cot(\theta) = XY$$
$$\sec(\theta) = OQ$$
$$\operatorname{cosec}(\theta) = OY$$

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$
$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$
$$1 + \cot^2(\theta) = \operatorname{cosec}^2(\theta)$$

Figura 2.4: Funções trigonométricas.

Os exercícios 6 e 7 do grupo IV da Ficha 2 apresentam outras propriedades importantes das funções seno e coseno, que podem ser deduzidas das propriedades referidas no teorema 2.2.3. Indicamos aqui algumas dessas propriedades:

Teorema 2.2.4.

(a) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\operatorname{sen}(0) = \cos(\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$.

(c) $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$, *a função coseno é par e tem período* 2π.

(d) $\cos(x - \pi/2) = \operatorname{sen}(x)$, *o seno é ímpar e tem período* 2π.

(e) $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}(x - \pi/2) = -\operatorname{sen}(x + \pi/2) = -\cos(x)$.

(f) $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

(g) $\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen}(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)$.

(h) $\cos(x + h) - \cos(x) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{h}{2}\right)$.

(i) *Em* $[0, \pi/2]$ *o seno é estritamente crescente e o coseno é estritamente decrescente.*

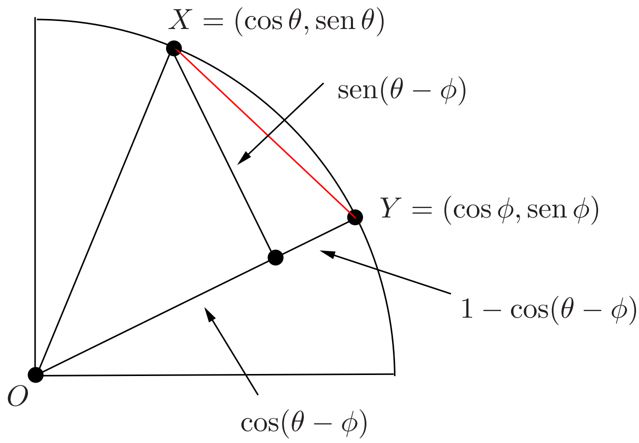


Figura 2.5: Cálculo de $\cos(\theta - \phi)$.

Demonstração. A título de exemplo, provamos aqui as alíneas a) e b), e parcialmente c).

(a): Tomamos $\phi = \theta = x$ na identidade b) do teorema 2.2.3, e usamos a identidade $\cos(0) = 1$, da a) do mesmo teorema.

(b): A identidade em (a) mostra que se uma das funções sen ou coseno é igual a ± 1 então a outra é nula.

(c): Tomamos $\theta = x$ e $\phi = \pi$ na identidade b) de 2.2.3, e usamos a identidade $\cos(\pi) = -1$, da a) do mesmo teorema, para obter $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$.

□

Os gráficos das funções seno e coseno estão representados na Figura 2.6.

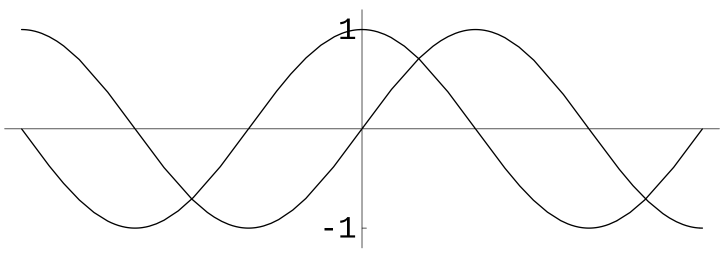


Figura 2.6: Gráfico das funções trigonométricas seno e coseno.

Exemplo 2.2.5. As funções trigonométricas *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cosecante* podem ser definidas a partir das funções seno e coseno:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\tan(x)}, \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ e } \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

O domínio da função tangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e o seu gráfico está representado na Figura 2.7. A função tangente é ímpar e periódica de período π, i.e.

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \text{e} \quad \tan(x+\pi) = \tan(x), \ \forall\, x \in D_{\tan}.$$

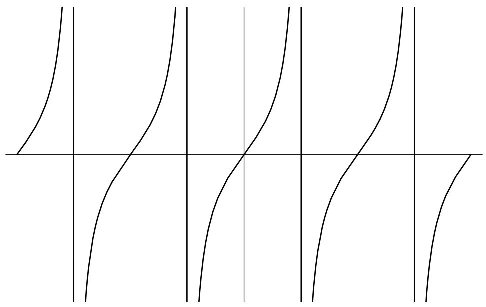


Figura 2.7: Gráfico da função trigonométrica tangente.

O domínio da função cotangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e a representação do seu gráfico fica como exercício. A função cotangente também é ímpar e periódica de período π, i.e.

$$\cot(x) = -\cot(-x) \quad \text{e} \quad \cot(x+\pi) = \cot(x), \ \forall\, x \in D_{\cot}.$$

Exemplo 2.2.6. Temos dificuldades análogas com as funções EXPONENCIAL e LOGARITMO, cuja definição rigorosa nos é ainda muito difícil. Em qualquer caso, as suas propriedades mais elementares devem ser bem conhecidas, incluindo o facto que *estas funções são inversas uma da outra*. Para organizar o nosso trabalho, e tal como fizémos para as funções trigonométricas, sumarizamos num único teorema um conjunto de propriedades que demonstraremos mais adiante, e que nos servirão sempre como base para argumentos mais rigorosos.

Teorema 2.2.7. *Existe uma função bijectiva crescente* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *tal que*([2])

(a) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$*, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *e*

(b) $1 - \dfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$*, para qualquer* $x \in \mathbb{R}^+$*.*

Temos em particular que $\log(1) = 0$ *e, se* $x > 0$*, temos* $\log(1/x) = -\log(x)$*.*

Como veremos, o logaritmo de um real $t > 1$ é na verdade a *área* da região limitada pelo eixo dos xx, pela hipérbole $xy = 1$, e pelas rectas verticais $x = 1$ e $x = t$. As desigualdades referidas acima são, deste ponto de vista, geometricamente evidentes.

Registamos aqui mais algumas propriedades elementares da função logaritmo, que são já consequências do teorema anterior, e cuja demonstração deixamos como exercício:

Corolário 2.2.8. *Temos* $\log(1) = 0$ *e, se* $x, y > 0$*:*

(a) $\log(1/x) = -\log(x)$*, e* $\log(y/x) = \log(y) - \log(x)$*,*

(b) $\log(x^n) = n\log(x)$*, para qualquer* $n \in \mathbb{Z}$*.*

A inversa de log é a exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, e é usual escrever e^x em vez de $\exp(x)$. Temos portanto que

$$e^{\log x} = x, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}^+, \text{ e } \log(e^x) = x, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

Os gráficos destas funções estão representados na Figura 2.8. Podemos também concluir do teorema 2.2.7 que

Teorema 2.2.9. *A função exponencial é estritamente crescente em* $\mathbb{R}$*, e*

$$e^{x+y} = e^x e^y, e^{-x} = 1/e^x, e^0 = 1, e^x \geq 1 + x.$$

Temos ainda que

$$\text{Se } x < 1, e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

A propriedade $\log(x^n) = n\log(x)$ referida no corolário 2.2.8 mostra que na verdade as funções logaritmo e exponencial podem ser usadas para definir e calcular potências com expoentes arbitrários α, desde qua a base x seja positiva.

Definição 2.2.10 (Exponencial de base positiva)**.** Se $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}.$$

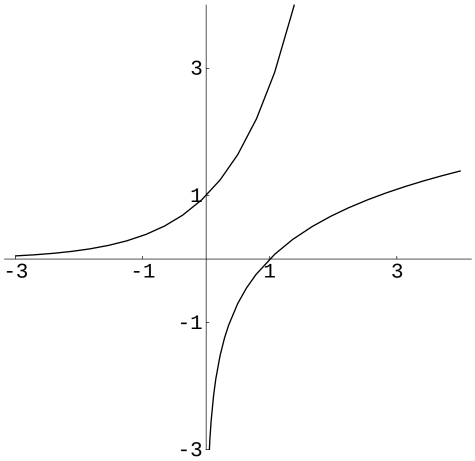


Figura 2.8: Gráficos da exponencial e do logaritmo.

É evidente que $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$, e que $\sqrt[n]{x} = e^{\log(x)/n}$.

Exemplo 2.2.11. As funções SENO HIPERBÓLICO e COSENO HIPERBÓLICO são definidas a partir da função exponencial:

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

O domínio das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico é $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 2.9.

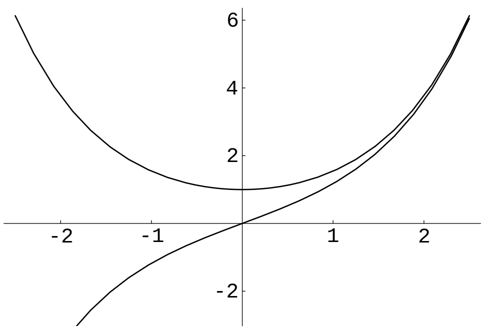


Figura 2.9: Gráficos do seno e coseno hiperbólicos.

[2]O leitor sabe provavelmente que existem funções logaritmo para qualquer base $a > 0$, $a \neq 1$. Qualquer uma delas é uma bijecção de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$, que é crescente se e só se $a > 1$. No entanto, as desigualdades aqui referidas são satisfeitas apenas pelo chamado logaritmo NATURAL, cuja base é o "*número de Euler*" $e = 2,7182\cdots$. Quando existe risco de ambiguidade, escrevemos $\log_a$ para designar o logaritmo de base a.

A função seno hiperbólico é ímpar e tem por imagem $\mathbb{R}$. A função coseno hiperbólico é par e tem por imagem o intervalo $[1,+\infty[$. Estas duas funções satisfazem a seguinte relação fundamental, que mostra que os pontos $(\cosh x, \operatorname{senh} x)$ pertencem à hipérbole com equação $x^2 - y^2 = 1$.

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.2}$$

O exercício 8 do grupo IV da Ficha 2 apresenta outras propriedades importantes das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico. Deve também notar-se que se definem funções como a *tangente hiperbólica*, *secante hiperbólica*, e outras, por fórmulas análogas às referidas a propósito das funções trigonométricas. Por exemplo,

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2.3 Funções e Operações Algébricas

As funções reais de variável real podem ser facilmente combinadas usando operações algébricas elementares, dando assim origem a novas funções. Supondo que $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$, a respectiva SOMA, DIFERENÇA, PRODUTO e QUOCIENTE designam-se por $f+g$, $f-g$, fg e f/g. As funções $f+g$, $f-g$, fg definem-se em $C = A \cap B$, e f/g em $D = \{x \in C : g(x) \neq 0\}$, pelas identidades

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ e } (f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Uma forma particularmente útil de produzir novas funções a partir de funções conhecidas é através da sua COMPOSIÇÃO.

Definição 2.3.1. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real, e $C = g^{-1}(A)$. A função COMPOSTA $f \circ g : C \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O cálculo de $(f \circ g)(x)$ faz-se a partir de $x \in C$, calculando primeiro $g(x)$, onde temos $g(x) \in A$, já que $x \in g^{-1}(A)$. Aplicamos em seguida a função f a $g(x)$, para obter finalmente $f(g(x))$. É interessante notar que esta operação *não é em geral comutativa, mas é sempre associativa*:

- Se $f(u) = u + 1$ e $g(v) = v^2$ então
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1$ e
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
- $(f \circ (g \circ h))(x) = f[(g \circ h)(x)] = f[g(h(x))]$ e

- $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f[g(h(x))]$.

Exemplo 2.3.2. Sejam $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \operatorname{sen}(y)\,.$$

O domínio de g é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, e o domínio de $f \circ g$ é o domínio de g, porque o domínio de f é $\mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \operatorname{sen}(1/x)\,.$$

O seu gráfico está representado na Figura 2.10. A função $g \circ f$ tem como domínio $D' = f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, e na verdade

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{cosec}(x).$$

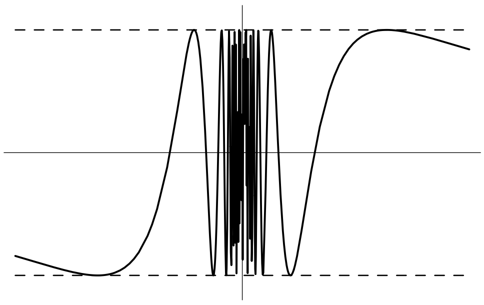


Figura 2.10: Gráfico da função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

Deve ainda notar-se que $f : A \to B$ é bijectiva se e só se existe uma função $g : B \to A$ (que é naturalmente a inversa de f) tal que

$$(g \circ f)(x) = x, \forall_{x \in A}, \text{ e } (f \circ g)(y) = y, \forall_{y \in B}$$

2.4 Limite de uma função num ponto

Suponha-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Por enquanto ainda de uma forma muito imprecisa, dizemos que o LIMITE de f quando $x \to a$ é b, ou que $f(x)$ TENDE PARA b quando x tende para a, se $f(x)$ é um valor aproximado de b quando x é valor aproximado de a. Podemos escrever

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ ou, por exemplo, } f(x) \to b \text{ quando } x \to a.$$

A noção de limite é particularmente interessante quando a função f não está definida em a, mas está definida em pontos arbitrariamente próximos de a. Exemplos clássicos são o cálculo de

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ e } \lim_{t\to t_0}\frac{gt^2-gt_0^2}{2(t-t_0)}.$$

O primeiro limite conduz ao cálculo do declive da recta tangente ao gráfico da função seno na origem, e o segundo ao cálculo da velocidade instantânea de um grave que cai segundo a lei de Galileu (a distância percorrida $s = gt^2/2$ é proporcional ao quadrado do tempo t). Outros exemplos igualmente clássicos são

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) \text{ e } \lim_{x\to 0} xe^{1/x^2}.$$

A ideia central da definição de limite é a de que

o erro $|f(x)-b|$ se pode reduzir a valores tão pequenos quanto se deseje através da redução da diferença $|x-a|$.

Por outras palavras, dado um QUALQUER "erro admissível" $\epsilon > 0$, que estamos dispostos a tolerar na diferença $|f(x)-b|$, existe SEMPRE um correspondente "nível de exigência" $\delta > 0$ tal que, quando $|x-a| < \delta$, então $|f(x)-b| < \epsilon$. Antes de formalizarmos mais esta observação, convém notar que é tradicional ignorar o valor que f assume em $x = a$ no cálculo do limite de f quando $x \to a$. É por outro lado essencial garantir que qualquer vizinhança de a contém pontos do domínio de f distintos do próprio a, caso em que dizemos que a é PONTO DE ACUMULAÇÃO do referido domínio. Com esta terminologia, podemos definir a noção de limite como se segue:

Definição 2.4.1. Suponha-se que $f : D \to \mathbb{R}$, onde $D \subset \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D. Dizemos que f tem *limite* b quando x tende para a se e só se

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\ \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Por palavras, e como dissémos acima,

para qualquer tolerância $\epsilon > 0$ existe um correspondente nível de exigência $\delta > 0$ tal que quando x é uma aproximação de a com erro inferior a δ então $f(x)$ é uma aproximação de b com erro inferior a ϵ,

Sublinhe-se novamente que se incluem nesta observação apenas pontos $x \in D$ distintos de a (na condição $|x-a| > 0$). Recordando que definimos $V_\sigma(z) = \{x \in \mathbb{R} : |x-z| < \sigma\}$, e introduzindo ainda $V'_\sigma(z) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-z| < \sigma\}$, então a definição acima pode ainda ser escrita na forma:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ x \in V'_\delta(a) \cap D \Longrightarrow f(x) \in V_\epsilon(b).$$

Deve notar-se como quase evidente que

Teorema 2.4.2. *Se f é uma função real de variável real e a é ponto de acumulação do seu domínio então as seguintes afirmações são equivalentes.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a}(f(x) - b) = 0, \lim_{x\to a}|f(x) - b| = 0$$

Começamos o nosso estudo de limites com alguns exemplos particularmente simples:

Exemplo 2.4.3. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função *constante*, i.e., se $f(x) = c\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, a condição $|f(x) - c| < \epsilon$ é satisfeita por todos os $x \in \mathbb{R}$, e portanto podemos seleccionar $\delta > 0$ arbitrariamente. □

Exemplo 2.4.4. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função *identidade*, i.e., $f(x) = x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a$.

Demonstração. Como $|f(x) - a| = |x - a|$, basta tomar $\delta = \epsilon$. □

Exemplo 2.4.5. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2.$

Demonstração. O ponto $1/2$ não pertence ao domínio da função, mas é um seu ponto de acumulação, pelo que faz sentido discutir o limite da função quando $x \to 1/2$. Se $x \neq 1/2$, ou seja, se $|x - 1/2| > 0$, temos

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{(2x + 1)(2x - 1)}{2x - 1} = 2x + 1, \text{ donde}$$

$$0 < |x - 1/2| \Rightarrow |f(x) - 2| = |(2x + 1) - 2| = 2|x - 1/2|$$

Se tomarmos $\delta = \epsilon/2$ temos então

$$0 < |x - 1/2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| = 2|x - 1/2| < 2\delta = \epsilon$$

□

Exemplo 2.4.6. $\operatorname{sen}(x) \to 0$ quando $x \to 0$.

Demonstração. Vimos no teorema 2.2.3 que $0 < \operatorname{sen}(x) < x$ quando $0 < x < \pi/2$. Como $\operatorname{sen}(0) = 0$ e a função sen é ímpar, concluímos que $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|$ quando $|x| < \pi/2$, donde aliás se segue que $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|$ para qualquer x. Tomamos $\delta = \epsilon$, e observamos que

$$|x| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen}(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

□

Exemplo 2.4.7. $\cos(x) \to 1$ quando $x \to 0$.

Demonstração. Notamos que se $\cos(x) \neq -1$ então

$$(1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) = \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow$$

$$|1 - \cos(x)| = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1 + \cos(x)} \leq \frac{x^2}{1 + \cos(x)}$$

Supondo que $|x| < \pi/2$, é fácil mostrar que $\cos(x) \geq 0$, e temos em particular

$$|x| < 1 \Rightarrow |1 - \cos(x)| \leq \frac{x^2}{1 + \cos(x)} < x^2 \leq |x|$$

Dado $\epsilon > 0$ podemos assim tomar $\delta = \min\{1, \epsilon\}$. □

Exemplo 2.4.8. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Demonstração. Mais uma vez, o ponto 0 não pertence ao domínio da função, mas é um seu ponto de acumulação. Sabemos que $0 < \cos(x) < \operatorname{sen}(x)/x < 1$ quando $|x| < \pi/2$, e é fácil concluir que

$$0 < |x| < \pi/2 \Rightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1 \Rightarrow |1 - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}| < |1 - \cos(x)|$$

Sabemos do exemplo anterior que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \Rightarrow |1 - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}| < |1 - \cos(x)| < \epsilon$$

□

Exemplo 2.4.9. Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.

Demonstração. Pelo exercício 8 do grupo II da Ficha 2, sabemos que é válida a igualdade:

$$x^n - a^n = (x - a) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} a^{k-1}, \text{ donde obtemos ainda}$$

$$|x^n - a^n| \leq |x - a| \sum_{k=1}^{n} |x|^{n-k} |a|^{k-1}.$$

Supondo para já que $|x - a| < 1$ então $|x| < a + 1$, e concluímos que:

$$|x^n - a^n| \leq |x - a| \sum_{k=1}^{n} |a + 1|^{n-k} |a|^{k-1}.$$

Definimos $M = \sum_{k=1}^{p}(a+1)^{p-k}a^{k-1}$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomamos $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{M})$. Então, para todo o x tal que $0 < |x-a| \leq \delta$, temos $|x-a| < 1$ e $|x-a| < \epsilon$, donde

$$|x^p - a^p| \leq |x-a|M \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ como afirmámos. □

Exemplo 2.4.10. Se H é a *função de Heaviside*, não existe $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$.

Demonstração. Argumentamos por contradição, supondo que $H(x) \to b$ quando $x \to 0$. Supondo agora que $\epsilon = 1/2$, existe então $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |H(x) - b| < 1/2$$

Consideramos os pontos $x_1 = \delta/2$ e $x_2 = -x_1$, donde é óbvio que $H(x_1) = 1$ e $H(x_2) = 0$. Temos então que $H(x_1) - H(x_2) = (H(x_1) - b) + (b - H(x_2))$, e

$$1 = |H(x_1) - H(x_2)| \leq |H(x_1) - b| + |b - H(x_2)| < 1/2 + 1/2 = 1,$$

o que é absurdo. □

Exemplo 2.4.11. Se dir é a *função de Dirichlet* e $a \in \mathbb{R}$, não existe $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{dir}(x)$.

Demonstração. Utilizamos um argumento por contradição em tudo análogo ao anterior, supondo que $\operatorname{dir}(x) \to b$ quando $x \to a$. Existe neste caso $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\operatorname{dir}(x) - b| < 1/2$$

Notamos que existem x_1 e x_2, ambos distintos de a, tais que $a - \delta < x_1, x_2 < a + \delta$, e tais que x_1 é *racional* e x_2 é *irracional*. Temos mais uma vez

$$1 = |\operatorname{dir}(x_1) - \operatorname{dir}(x_2)| \leq |\operatorname{dir}(x_1) - b| + |b - \operatorname{dir}(x_2)| < 1/2 + 1/2 = 1,$$

o que é absurdo.

□

Exemplo 2.4.12. Seja f a função dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ quando } x \neq 0.$$

Então não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Demonstração. O ponto 0 é um ponto de acumulação do domínio de f. Observamos que

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 \text{ e que } \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1, \text{ para qualquer } k \in \mathbb{Z}.$$

Sejam $x_k^+ = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ e $x_k^- = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, e suponha-se que $f(x) \to b$ quando $x \to 0$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < 2,$$

mas deve ser claro que existem pontos x_k^+ e x_k^- tais que $|x_k^+|, |x_k^-| < \delta$. Temos então

$$2 = |f(x_k^+) - f(x_k^-)| \leq |f(x_k^+) - b| + |b - f(x_k^-)| < 1 + 1,$$

o que é absurdo. □

Exemplo 2.4.13. Se a função f é dada por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

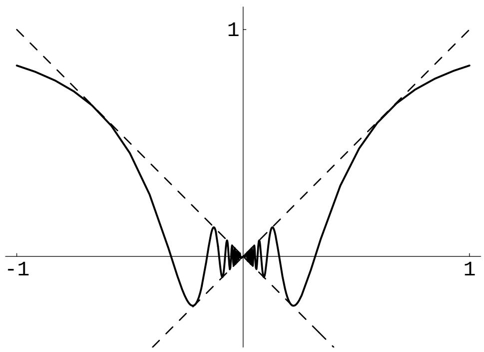


Figura 2.11: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

Demonstração. Começamos por observar que, se $x \neq 0$,

$$0 \leq \left| x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \, .$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ para obter

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq |x| < \varepsilon.$$

□

Notamos de passagem que o limite de uma função num dado ponto, se existir, é único.

Teorema 2.4.14. (Unicidade do Limite) *Seja f uma função e suponha-se que $f(x) \to b$ e $f(x) \to c$ quando $x \to a$. Então $b = c$.*

Dem. Utilizamos aqui um argumento por redução ao absurdo análogo a outros que usámos acima. Supomos $b \neq c$ e tomamos $\epsilon = |b - c|/2 > 0$. Observamos que:

Como $f(x) \to b$ quando $x \to a$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Como $f(x) \to c$ quando $x \to a$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e como a é ponto de acumulação do domínio de f, existe algum $x \neq a$ tal que $|x - a| < \delta$. Temos então

$$|b - c| \leq |b - f(x)| + |f(x) - c| < \epsilon + \epsilon = |b - c|,$$

o que é absurdo. □

2.5 Propriedades Elementares de Limites

Estudamos nesta secção algumas propriedades elementares do limite de funções que em muitos casos nos permitem calcular limites sem necessidade de determinar explicitamente os pares $\epsilon - \delta$ referidos na definição 2.4.1.

Teorema 2.5.1. (Limite e Operações Algébricas) *Sejam f e g funções, e suponha-se que a é ponto de acumulação do domínio de $f + g$. Se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

temos então que:

(a) $\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c.$

(b) $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$

(c) se $c \neq 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Dem. Para provar (a) no caso da soma, supomos que $\epsilon > 0$, e recordamos que existem:

$$\delta_1 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow \ |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ e}$$

$$\delta_2 > 0 \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow \ |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, se escolhermos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, obtemos:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (b+c)| = |(f(x)-b) + (g(x)-c)| \leq$$
$$|f(x)-b| + |g(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

o que mostra que:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b + c.$$

O argumento acima aplica-se sem quaisquer modificações ao caso da diferença. Os casos do produto e do quociente são ligeiramente mais elaborados, e começamos com o caso especial do produto em que $c = 0$, provando que nestas condições $f(x)g(x) \to 0$ quando $x \to a$. Dado $\epsilon > 0$, notamos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

- $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |b| + 1$
- $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \epsilon/(1+|b|)$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos finalmente que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \epsilon$$

O caso geral do produto segue-se deste e da a), porque

$$f(x)g(x) - bc = f(x)(g(x)-c) + c(f(x)-b)$$

O caso do quociente fica como exercício. Pode por exemplo mostrar-se que se $g(x) \to c \neq 0$ então $1/g(x) \to 1/c$, e depois aplicar a c). Deve além disso usar-se a igualdade

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|g(x)-c|}{|cg(x)|}$$

□

Exemplo 2.5.2. Este resultado torna possível o cálculo directo de muitos limites. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^2+1} &= \frac{\lim_{x\to a}(x^4 - 3x + 2)}{\lim_{x\to a}(x^2+1)} \quad \text{(Teorema 2.5.1 (iii))} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} x^4 - \lim_{x\to a} 3x + \lim_{x\to a} 2}{\lim_{x\to a} x^2 + \lim_{x\to a} 1} \quad \text{(Teorema 2.5.1 (i))} \\
&= \frac{a^4 - 3a + 2}{a^2+1} \quad \text{(Exemplo 2.4.9)}
\end{aligned}$$

O próximo teorema permite calcular o limite de uma função por comparação dessa função com outras cujos limites são conhecidos.

Teorema 2.5.3 (Princípio da Função Enquadrada)**.** *Sejam f, g e h funções tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,,$$

para qualquer x no domínio D de g. Se $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação dos domínios de f, g e h, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Dem. Dado qualquer $\epsilon > 0$, sabemos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, pelo menos para $x \in D$, temos

- $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$

Tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, e notamos que, como g está "encaixada" entre f e h, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - b| < \varepsilon.$$

□

Exemplos 2.5.4.

(1) O teorema anterior fornece-nos um outro processo para mostrar que $g(x) = \operatorname{sen}(x)/x \to 1$ quando $x \to 0$. Basta recordar que

$$\cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1 \text{ quando } 0 < |x| < \pi/2,$$

e notar que $\cos(x) \to 1$ quando $x \to 0$. O resultado segue-se do teorema anterior, com $f(x) = \cos(x)$ e $h(x) = 1$.

(2) Suponha-se que $g(x) = x^2 \operatorname{dir}(x)$, e note-se que $0 \leq g(x) \leq x^2$, para concluir que $g(x) \to 0$ quando $x \to 0$.

Aproveitamos igualmente para calcular dois limites muito úteis que envolvem as funções logaritmo e exponencial.

Exemplos 2.5.5.

(1) Para mostrar que $\log(x)/(x-1) \to 1$ quando $x \to 1$, recordamos de 2.2.7 que

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \text{ donde } \frac{1}{x} \leq \frac{\log(x)}{x-1} \leq 1$$

Aplicamos agora os teoremas 2.5.3 e 2.5.1. É também útil definir

$$\alpha(x) = \frac{\log(x)}{x-1}, \text{ donde } \log(x) = (x-1)\alpha(x) \text{ e } \lim_{x\to 1} \alpha(x) = 1$$

Segue-se de 2.5.1 que $\log(x) \to 0$ quando $x \to 1$.

(2) Para mostrar que $(e^x - 1)/x \to 1$ quando $x \to 0$, recordamos de 2.2.9 que, quando $x < 1$, temos

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \text{ donde } x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}, \text{ e}$$

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

Aplicamos novamente os teoremas 2.5.3 e 2.5.1. Tomamos agora

$$\beta(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \text{ donde } e^x = 1 + x\beta(x) \text{ e } \lim_{x\to 0} \beta(x) = 1$$

Podemos ainda concluir de 2.5.1 que $e^x \to 1$ quando $x \to 0$.

Supondo que $g(x) \to b$ quando $x \to a$ e $f(y) \to c$ quando $y \to b$, podemos ainda concluir relativamente à composta $f \circ g$ que, em determinadas condições, $(f \circ g)(x) \to c$ quando $x \to a$. A principal dificuldade a vencer aqui é o facto de podermos ter $g(x) = b$ mesmo quando $x \neq a$, e o valor $f(b)$ ser na verdade arbitrário. O próximo teorema indica duas alternativas possíveis que permitem obter a conclusão desejada sobre a função composta.

Teorema 2.5.6 (Limite da Função Composta)**.** *Sejam f e g duas funções reais de variável real, e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do domínio de $f \circ g$. Então*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \text{ e } \lim_{y\to b} f(y) = c \Longrightarrow \lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = c,$$

sempre que uma das seguintes condições é satisfeita:

(a) $f(b) = c$, ou

(b) $g(x) \neq b$ quando $x \neq a$.

Dem. Verificamos este teorema apenas no caso (a) acima. Sendo D_f o domínio de f, dado $\epsilon > 0$, e como $f(y) \to c$ quando $y \to b$, observamos que existe $\gamma > 0$ tal que:

$$y \in D_f \text{ e } 0 < |y - b| < \gamma \Longrightarrow |f(y) - c| < \epsilon.$$

Temos por hipótese que $f(b) = c$ e portanto a restrição $|y - b| > 0$ é desnecessária acima, i.e.,

$$(1)\ y \in D_f \text{ e } |y - b| < \gamma \Longrightarrow |f(y) - c| < \epsilon.$$

Sabemos também que $g(x) \to b$ quando $x \to a$, e portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$(2)\ x \in D \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - b| < \gamma.$$

Resulta de (1) e (2) que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - b| < \gamma \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \epsilon.$$

Por outras palavras, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$. □

Exemplos 2.5.7.

(1) Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$, observamos que:

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = f(g(x)), \text{ onde } g(x) = x^2 \text{ e } f(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

Como já sabemos que (ver Exemplo 2.4.8):

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1 \text{ e } x^2 \neq 0 \text{ quando } x \neq 0,$$

o Teorema 2.5.6 mostra que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 1.$$

(2) Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$, observamos que:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = 4\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = 4f(g(x)), \text{ onde } g(x) = 4x \text{ e } f(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

Concluímos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{x} = (4)(1) = 4.$

(3) Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$, observamos que:

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = x\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = xf(g(x)), \text{ onde } g(x) = x^2 \text{ e } f(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

Concluímos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = (0)(1) = 0.$

(4) Para mostrar que $\lim\limits_{x\to a} \log(x) = \log(a)$, recordamos o exemplo 2.5.5.1:

$$\log(x) - \log(a) = \log(x/a) = (x/a - 1)\alpha(x/a) \to 0$$

(5) Para mostrar que $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$, recordamos o exemplo 2.5.5.2:

$$e^x - e^a = e^a(e^{x-a} - 1) = e^a(x-a)\beta(x-a) \to 0$$

(6) Para mostrar que $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$, recordamos o teorema 2.2.4 g) e o exemplo 2.4.6:

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| = 2|\cos((x+a)/2)\operatorname{sen}((x-a)/2)| \leq 2|\operatorname{sen}((x-a)/2)| \to 0$$

(7) Analogamente, para mostrar que $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$, usamos 2.2.4 h) e novamente 2.4.6:

$$|\cos(x) - \cos(a)| = 2|\operatorname{sen}((x-a)/2)\operatorname{sen}((x+a)/2)| \leq 2|\operatorname{sen}((x-a)/2)| \to 0$$

(8) Para calcular $\lim\limits_{x\to a} x^x$ para $a > 0$, recordamos de 2.2.10 que $x^x = e^{x\log x}$, notamos que $x\log x \to a\log a$, e concluímos que $x^x \to a^a$.

(9) Mais geralmente, supondo $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b > 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, concluímos sem dificuldades que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\log(f(x))} = e^{c\log(b)} = b^c.$$

2.6 Limites Laterais, Infinitos e no Infinito

É por vezes útil calcular limites quando $x \to a$ apenas de um dos lados de a: o chamado *limite à direita*, obtido quando $x \to a$ mas $x > a$, e o *limite à esquerda*, obtido quando $x \to a$ mas $x < a$.

Definição 2.6.1. Supondo que D é o domínio de f definimos

- <u>Limite à direita</u>: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$ se e só se a é ponto de acumulação de $D\cap]a,\infty[$ e para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

- <u>Limite à esquerda</u>: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ se e só se a é ponto de acumulação de $D\cap]-\infty, a[$ e para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Usa-se por vezes $f(a^+)$ e $f(a^-)$ em lugar de $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e de $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Exemplo 2.6.2. Vimos que a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

não tem $\lim_{x\to 0} H(x)$. No entanto, tem limites laterais no ponto zero dados por

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1\,.$$

Deixamos como exercício a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 2.6.3. *Sendo $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de variável real, e a um ponto de acumulação tanto de $D \cap]-\infty, a[$ como de $D \cap]a, \infty[$, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b.$$

A noção de limite lateral é na realidade um caso particular do que chamamos um *limite relativo* a um dado conjunto A. Mais exactamente, dado $f : D \to \mathbb{R}$ e um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, os limites de f RELATIVOS A A são os limites da restrição de f a A, i.e., são os limites da função $g : A \cap D \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x)$.

Definição 2.6.4. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $A \subset \mathbb{R}$. Se a é ponto de acumulação de $A \cap D$, diremos que f *tem limite b no ponto a relativo ao conjunto A*, e escreveremos

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = b\,,$$

se e só se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ (x \in A \cap D \text{ e } 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.6.5. Seja $f = \mathrm{dir}$ a função de Dirichlet, $A = \mathbb{Q}$ e $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} \mathrm{dir}(x) = 1 \text{ e } \lim_{\substack{x\to a \\ x\in B}} \mathrm{dir}(x) = 0$$

É muito conveniente alargar a definição de limite, de modo a que a identidade $\lim_{x\to a} f(x) = b$ inclua os casos em que a e b podem tomar os valores *infinitos* $-\infty$ e $+\infty$. Estes limites podem aliás reduzir-se aos que já estudámos, tomando:

Definição 2.6.6 (Limites Infinitos e Limites no Infinito)**.**

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1/x)$,

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(1/x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$,
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se e só se $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$ e $f(x) > 0$,
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ se e só se $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

Usamos a expressão RECTA ACABADA para nos referirmos ao conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

É também possível definir vizinhanças dos "pontos" $\pm\infty$ de "raio" $\varepsilon > 0$ de forma a que a definição de limite seja independente de a e b serem finitos ou infinitos. Para isso, tomamos

$$V_\varepsilon(-\infty) =]-\infty, -1/\varepsilon[\quad \text{e} \quad V_\varepsilon(+\infty) =]1/\varepsilon, +\infty[\ .$$

Se $a = \pm\infty$ então $V'_\epsilon(a) = V_\epsilon(a)$, e continuamos a dizer que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é ponto de acumulação de $D \subset \mathbb{R}$ se e só se $V'_\epsilon(a) \cap D \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon > 0$.

Teorema 2.6.7. *Se $f : D \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e a é ponto de acumulação de D, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(b).$$

É fácil verificar que a definição e teorema acima podem ser reformulados como se segue

Teorema 2.6.8. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ então*

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, L > 0\ :\ x > L \text{ e } x \in D \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, L > 0\ :\ x < -L \text{ e } x \in D \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |x - a| < \delta \text{ e } x \in D \Rightarrow f(x) > L.$$

(d) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |x - a| < \delta \text{ e } x \in D \Rightarrow f(x) < -L.$$

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, M > 0\ :\ x > M \ \text{ e } x \in D \Rightarrow f(x) > L.$$

(f) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, M > 0\ :\ x > M \ \text{ e } x \in D \Rightarrow f(x) < -L.$$

(g) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, M > 0\ :\ x < -M \ \text{ e } x \in D \Rightarrow f(x) > L.$$

(h) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, M > 0\ :\ x < -M \ \text{ e } x \in D \Rightarrow f(x) < -L.$$

As condições acima têm adaptações óbvias ao caso dos limites laterais e ao caso mais geral de limites relativos quaisquer, pela simples substituição do conjunto D pelo conjunto $D \cap A$ apropriado.

Exemplos 2.6.9.

(1) É muito fácil mostrar que $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ e portanto $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$.

(2) É igualmente fácil mostrar que $\lim_{x\to\pm 0} 1/x = \pm\infty$.

(3) Para mostrar que $\log(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, supomos $L > 0$. Como a função log é sobrejectiva, existe $M > 0$ tal que $\log(M) = L$. Como log é (estritamente) crescente, temos $\log(x) > L$ para qualquer $x > M$. Por outras palavras, e de acordo com e) no teorema anterior,

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty.$$

(4) Para calcular $\lim_{x\to 0^+} \log(x)$, observamos que

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(1/x) = \lim_{x\to+\infty} -\log(x) = -\infty$$

(5) Como $e^x \geq 1 + x$, é muito fácil concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

(6) Podemos ainda concluir que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 1/e^x = 0$$

(7) Os limites de x^α, com $\alpha \in \mathbb{R}$, ou de α^x, com $\alpha > 0$, podem ser calculados com recurso às funções exponencial e logaritmo. Por exemplo, se $\alpha > 0$ temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha\log(x)} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log(\alpha)} = \begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty, \text{ se } \alpha > 1 \\ 1, \text{ se } \alpha = 1 \\ \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0, \text{ se } \alpha < 1 \end{cases}$$

(8) Para completar o gráfico do Exemplo 2.4.13 apresentado na Figura 2.11 observamos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

A Figura 2.12 apresenta uma versão mais completa do gráfico da função em causa.

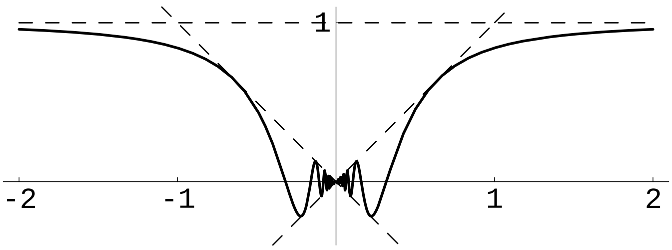


Figura 2.12: Gráfico do exemplo 2.4.13

2.7 Indeterminações

O teorema 2.5.1 sobre limites e operações algébricas é facilmente generalizável para incluir limites na recta acabada. Usaremos para isso as regras "naturais":

Definição 2.7.1 (Operações Algébricas na Recta Acabada)**.**

1. Somas e Diferenças:

   (a) Se $b \in \mathbb{R}$ e $c = \pm\infty$ então $\pm b + c = c \pm b = c$.

   (b) $\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$.

   (c) Não está definido: $\infty - \infty$

2. Produtos:
   (a) Se $b \neq 0$ e $c = \pm\infty$ então $bc = \pm\infty$, sendo o sinal do resultado obtido pelas regras usuais dos sinais.
   (b) Não está definido: $(0)(\pm\infty)$
3. Quocientes:
   (a) Se $b \in \mathbb{R}$ e $c = \pm\infty$ então $b/c = 0$.
   (b) Se $b = \pm\infty$ e $c \neq 0$ então $b/c = \pm\infty$, sendo o sinal do resultado obtido pelas regras usuais dos sinais.
   (c) Não estão definidos: $0/0, \pm\infty/\pm\infty, \pm\infty/0$.

Podemos então generalizar o teorema 2.5.1 na seguinte forma

Teorema 2.7.2. *Sejam f e g funções tais que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

onde $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ e suponha-se que a é ponto de acumulação do domínio de $f+g$. Em todos os casos onde as expressões referidas são válidas de acordo com as operações algébricas em $\mathbb{R}$ ou de acordo com as convenções indicadas na definição anterior, temos que:

(a) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c.$

(b) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$

(c)

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Sempre que no cálculo de limites nos depararmos com uma expressão que não foi definida nos termos da definição acima, com excepção do caso $\infty/0$, dizemos que o cálculo conduz a uma INDETERMINAÇÃO. Este termo é utilizado precisamente porque nada podemos concluir sobre a existência e valor do limite em causa, conhecendo apenas os valores de b e c. Deve notar-se aliás que TODAS as indeterminações são equivalentes, podendo sempre reduzir-se a um tipo específico, por exemplo, o caso $0/0$:

- Caso $(0)(\pm\infty)$: Se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ então

$$f(x)g(x) = f(x)/(1/g(x)) = f(x)/u(x), \text{ onde } u(x) \to 0.$$

- Caso $(\pm\infty)/(\pm\infty)$: Se $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ então

$$f(x)/g(x) = (1/g(x)/(1/f(x)) = u(x)v(x), \text{ onde } u(x), v(x) \to 0.$$

- Caso $(\pm\infty) - (\pm\infty)$: Se $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ então

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right), \text{ que é o caso } (0)(\infty).$$

- É também comum referir indeterminações que envolvem potências, mas estas mais uma vez reduzem-se às que já indicámos. Como $b^c = e^{c \log b}$, as indeterminações com potências correspondem a $c \log b = (0)(\pm\infty)$. Se $c = 0$ trata-se dos casos 0^0 e ∞^0, e se $\log b = 0$ trata-se do caso 1^∞.

O caso $\infty/0$ não corresponde a uma indeterminação no sentido usual do termo, porque se $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$ então temos sempre $f(x)/g(x) \to \infty$ ou o limite em causa não existe. A conclusão depende apenas do sinal algébrico de $f(x)/g(x)$ em vizinhanças de a: é claro que $|f(x)/g(x)| \to +\infty$, mas o limite de $f(x)/g(x)$ só existe se existir uma vizinhança de a onde o sinal de $f(x)/g(x)$ não se altere.

O teorema 2.5.6 sobre o limite de funções compostas continua válido na recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, assim como o Princípio da Função Enquadrada.

Exemplos 2.7.3.

(1) O limite de $\operatorname{sen}(x)/x$ quando $x \to 0$ é uma indeterminação do tipo $0/0$, e já verificámos que é igual a 1. Repare-se que escrevendo $f(x) = a \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = x$ então o limite de $f(x)/g(x)$ é sempre uma indeterminação do tipo $0/0$, e o valor do limite é $a \in \mathbb{R}$, que é inteiramente arbitrário, o que mais uma vez ilustra as razões pelas quais nos referimos a estes limites como "indeterminações".

(2) É fácil dar exemplos de funções f e g tais que $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$, e a diferença $f(x) - g(x)$ se comporta das mais diversas maneiras. Considerem-se os casos:

   - $f(x) = x^2, g(x) = x$ e $f(x) = x, g(x) = x^2$: os limites são $+\infty$ e $-\infty$.
   - $f(x) = x + a, g(x) = x$: o limite é a, que pode ser um qualquer real.
   - $f(x) = x + \operatorname{sen}(x), g(x) = x$: o limite não existe.

(3) Temos $\operatorname{sen}(1/x) \to 0$ quando $x \to \infty$, porque neste caso $1/x \to 0$, e $\operatorname{sen}(y) \to 0$ quando $y \to 0$.

(4) Temos $e^{-x^2} \to 0$ quando $x \to \infty$, porque neste caso $-x^2 \to -\infty$, e $e^y \to 0$ quando $y \to -\infty$.

(5) Em muitos casos, se $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$, é útil comparar a respectiva "velocidade de crescimento" para ∞ calculando o limite da razão $f(x)/g(x)$, que é evidentemente uma indeterminação do tipo ∞/∞. Por exemplo, é comum dizer que $\log(x)$ *cresce mais devagar do que qualquer potência positiva de* x, porque

$$\text{Se } \alpha > 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

Para verificar este facto, observe-se primeiro que

$$\log(x) \leq x - 1 \Rightarrow \log(x^{1/2}) \leq x^{1/2} - 1, \text{ ou } \log(x)/2 \leq x^{1/2} - 1$$

Temos então que, quando $x \to +\infty$,

$$0 \leq \frac{\log(x)}{x} \leq \frac{2(x^{1/2}-1)}{x} = 2(x^{-1/2} - x^{-1}) \to 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

O cálculo de $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}$ quando $\alpha > 0$ fica como exercício.

(6) O resultado anterior pode ser fraseado em termos da função exponencial: e^x *cresce mais depressa do que qualquer potência positiva de* x, porque, e agora para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \text{ ou seja, } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

Notamos apenas que, quando $x \to +\infty$,

$$\frac{x}{e^x} = \frac{\log(e^x)}{e^x} = \frac{\log(y)}{y} \to 0, \text{ porque } y = e^x \to +\infty \text{ e } \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(y)}{y} = 0$$

Deixamos mais uma vez como exercício o caso geral do $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$.

(7) Podemos facilmente calcular limites análogos, por exemplo:

- $\lim_{x\to0^+} x\log(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1/y)}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(y)}{y} = 0 \; (y = 1/x)$
- $\lim_{x\to0} xe^{1/x^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^{1/2}} = 0 \; (y = 1/x^2)$

(8) É também comum referir as indeterminações de tipo 1^∞, 0^0 e ∞^0 (a expressão 0^∞ não é uma indeterminação, porque, dependendo do sinal do expoente, só pode ser 0 ou $+\infty$). Estas indeterminações reduzem-se às anteriores, porque, como

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))},$$

o cálculo do limite de $f(x)^{g(x)}$ reduz-se ao do limite de $g(x)\log(f(x))$. As únicas indeterminações a considerar são:

(i) $g(x) \to 0$ e $\log(f(x)) \to \pm\infty$: Casos $0^{+\infty}$ e 0^0,

(ii) $g(x) \to \pm\infty$ e $\log(f(x)) \to 0$: Caso $1^{\pm\infty}$.

Um exemplo clássico desta natureza é:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log(1+\frac{1}{x})}$$

Tomando $t = 1 + 1/x$, ou seja, $x = 1/(t-1)$, recordamos do exemplo 2.5.5.1 que

$$\lim_{x\to+\infty} x\log(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to1} \frac{\log(t)}{t-1} = 1.$$

Concluímos imediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

2.8 Continuidade

Dada uma função real de variável real f, é natural indagar se o cálculo da imagem $y = f(x)$ é muito ou pouco sensível a alterações da variável independente x. Dito doutra forma, em que sentido é verdade que $x \approx a$ implica $f(x) \approx f(a)$? Usamos o termo CONTINUIDADE para nos referirmos a esta propriedade, cujo sentido rigoroso deve ser claro do nosso estudo de limites. *Trata-se apenas de saber se temos ou não*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

De facto, esta igualdade pode falhar por várias razões:

- O limite de $f(x)$ quando $x \to a$ não existe (por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a = 0$; cf. Exemplo 2.4.12).

- O limite existe, mas o ponto a não pertence ao domínio D, e portanto não faz sentido sequer falar em $f(a)$ (por exemplo, a função $f(x) = x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ em $a = 0$; cf. Exemplo 2.4.13).

- O limite existe, a pertence ao domínio, mas o limite é diferente de $f(a)$. Por exemplo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \neq 0$, e $f(0) = 1$. Temos então que $f(x) \to 0 \neq f(0) = 1$ quando $x \to 0$.

- É também possível que $f(a)$ esteja definida, mas a não seja um ponto de acumulação do domínio, donde não faz sentido falar do limite de $f(x)$ quando $x \to a$.

Formalizamos a noção de continuidade como se segue

Definição 2.8.1 (Função Contínua)**.** Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se CONTÍNUA NUM PONTO $a \in D$ se a é ponto de acumulação de D e

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

A função f diz-se CONTÍNUA em $A \subseteq D$ se f é contínua em qualquer ponto $a \in A$.

Intuitivamente uma função é contínua se o seu gráfico não apresenta interrupções ou saltos, ou seja, se o seu gráfico pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel, mas mesmo esta ideia intuitiva deve ser sempre usada com prudência, porque em certos casos é demasiado simplista como representação da realidade. Note-se em qualquer caso que a definição acima pode ser refraseada essencialmente repetindo a definição de limite, para concluir que, se $a \in D$ é ponto de acumulação de D então f é contínua em a se e só se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ x \in D \text{ e } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Naturalmente que as propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. O teorema seguinte ilustra este facto.

Teorema 2.8.2.

(i) *Se f e g são funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são contínuas em a.*

(ii) *Sejam f e g duas funções. Se $a \in D_{f\circ g}$, g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua em a.*

Dem. Consequência imediata da Definição 2.8.1 e dos Teoremas 2.5.1 e 2.5.6. □

Podemos facilmente identificar muios exemplos de funções contínuas.

Exemplos 2.8.3.

(1) Vimos que $x^n \to a^n$ quando $x \to a$. Segue-se que qualquer *função polinomial* $p(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

(2) Qualquer *função racional* $f = p/q$, com p, q polinómios, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ onde $q(a) \neq 0$, ou seja, é contínua no seu domínio de definição "natural".

(3) A função *módulo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$, porque $|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a|$.

(4) A função de Heaviside, apresentada no Exemplo (3) em 2.1.1, é contínua em qualquer ponto $a \neq 0$ e descontínua no ponto zero.

(5) A função de Dirichlet, apresentada no Exemplo (4) em 2.1.1, é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

(6] As funções sen e cos são contínuas em $\mathbb{R}$, conforme mostrámos nos exemplos (6) e (7) de 2.5.7. Segue-se que as *funções trigonométricas* são contínuas nos respectivos domínios de definição.

(7) A *função exponencial* é contínua em $\mathbb{R}$, como referido no exemplo (5) de 2.5.7. Segue-se igualmente que as *funções hiperbólicas* são contínuas nos seus domínios de definição.

(8) A *função logaritmo* é contínua em $\mathbb{R}^+$, como vimos no exemplo (4) de 2.5.7.

(9) As funções dadas por $f(x) = x^\alpha$ e $g(x) = \alpha^x$ são contínuas nos seus domínios de definição, de acordo com os exemplos (7) e (8) acima.

Sendo $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e $g(x) = x\log(x^2)$ para $x \neq 0$, recordamos aqui os limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x\to 0} x\log(x^2) = 0$$

As funções f e g têm limite quando $x \to 0$ mas $f(0)$ e $g(0)$ não estão definidos. É por isso evidente que as funções F e G dadas por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e } G(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

são contínuas em $x = 0$, e são *extensões* das funções f e g acima. Dizemos por isso que são PROLONGAMENTOS POR CONTINUIDADE das funções originais ao ponto $x = 0$. O grupo I da Ficha 3 tem uma série de exercícios relativos a este tipo de prolongamentos por continuidade.

Exemplo 2.8.4. Seja $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. Como $f(x) \to 0$ quando $x \to 0$, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

é o prolongamento por continuidade de f ao ponto $x = 0$.

A noção de limites laterais introduzida em 2.6.1 dá naturalmente origem à seguinte definição de *continuidade lateral.*

Definição 2.8.5. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f é CONTÍNUA À DIREITA em a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;

(ii) f é CONTÍNUA À ESQUERDA em a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplo 2.8.6. A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0, \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

é contínua à direita no ponto zero, mas não é contínua à esquerda nesse ponto. De facto,

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 = H(0) \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)\,.$$

Indicamos a seguir um conjunto de propriedades relativamente elementares que são comuns a todas as funções contínuas, e que dependem apenas da continuidade num dado ponto. A primeira dessas propriedades diz respeito ao seu sinal algébrico: se uma função contínua é positiva num *ponto* a, então é necessariamente contínua numa *vizinhança* de a.

Teorema 2.8.7. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$ com $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Tomamos $\epsilon = f(a) > 0$, e notamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(f(a)) \Rightarrow f(x) > f(a) - \epsilon = 0.$$

□

Este resultado pode ser generalizado facilmente como se segue:

Teorema 2.8.8. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $a \in D = D_f \cap D_g$. Se $f(a) > g(a)$ então*

$$\exists\, \delta > 0 \,:\; x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) > g(x)\,.$$

Dem. Como f e g são por hipótese contínuas em $a \in D_f \cap D_g$, temos que $h = f - g$ é igualmente contínua em a, e é claro que $h(a) = f(a) - g(a) > 0$. O corolário resulta assim de aplicar o teorema 2.8.7 à função h. □

O próximo teorema é de natureza análoga.

Teorema 2.8.9. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Tomamos $\epsilon > 0$ qualquer, e recordamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(f(a)) \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

□

2.9 Funções Contínuas em Intervalos

Quando uma função é contínua em *todos* os pontos de um dado intervalo, é possível tirar conclusões significativas sobre o seu comportamento no intervalo em questão. Começamos por referir um resultado que é frequentemente utilizado para estabelecer a existência de soluções de equações do tipo $f(x) = c$, ou $f(x) = g(x)$, quando as funções em causa são contínuas num dado intervalo.

Teorema 2.9.1 (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano)**.** *Seja f uma função contínua num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, e suponha-se que f assume valores distintos nos pontos $a, b \in I$,ou seja, $f(a) \neq f(b)$. Seja ainda $\alpha \in \mathbb{R}$ um qualquer valor "intermédio" entre $f(a)$ e $f(b)$. Então a equação $f(x) = \alpha$ tem pelo menos uma solução $x \in [a, b]$.*

Este resultado afirma que uma função contínua f num intervalo $[a, b]$ assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Geometricamente, isto significa que o gráfico de f intersecta a recta horizontal $y = \alpha$ sempre que α esteja entre $f(a)$ e $f(b)$. Antes de passarmos à demonstração deste resultado, ilustramos a sua aplicação com alguns exemplos.

Exemplos 2.9.2.

(1) Para mostrar que a equação $\tan(x) = x^2 + 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi/2[$, consideramos a função dada por $f(x) = \tan(x) - x^2 - 1$ no intervalo $I =]-\pi/2, \pi/2[$ e observamos que:

- f é contínua no intervalo I.
- $f(0) = -1$
- $\tan(x) \to +\infty$ quando $x \to \pi/2^-$, e portanto existe $-\pi/2 < b < \pi/2$ tal que $\tan(b) > 5$.
- Como $\pi/2 < 2$, temos $b^2+1 < (\pi/2)^2+1 < 5$, e portanto $f(b) > 0$.
- Temos assim $f(0) < 0 < f(b)$, e pelo Teorema de Bolzano existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 0$ no intervalo $]0, b[$.

(2) Um raciocínio análogo a este permite mostrar que qualquer polinómio p do terceiro grau tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$, i.e., existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. Supondo que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por $p(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, é fácil mostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

Logo, existem $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}^+$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, pelo que o Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que $p(c) = 0$. É também fácil generalizar esta observação a qualquer polinómio de grau *ímpar*.

(3) A existência de soluções da equação $x^n = a$ quando n é um natural e $a \geq 0$ pode ser estabelecida a partir da existência das funções exponencial e logaritmo, e foi esta aliás uma das principais razões que levaram à definição e cálculo destas funções. É no entanto interessante observar que essa existência é também uma consequência directa do Teorema de Bolzano.

Dem. Já sabemos que a função (polinomial) dada por $f(x) = x^n$ é contínua em $\mathbb{R}$. Supondo primeiro que $0 < a < 1$, é óbvio que $f(0) < a < f(1)$, e portanto existe $0 < c < 1$ tal que $f(c) = a$, i.e., $c^n = a$.

Os casos $a = 0$ e $a = 1$ são óbvios, e se $a > 1$ podemos simplesmente considerar a solução de $x^n = 1/a$, e invertê-la. $\square$

(4) O Teorema de Bolzano deixa de ser aplicável se a função f não é contínua em *todos* os pontos do intervalo em causa. Por exemplo, a função de Heaviside H é contínua em $\mathbb{R}$ com excepção do ponto $x = 0$. É claro que $H(-1) < 1/2 < H(1)$, mas não existe nenhum ponto onde $H(x) = 1/2$.

O Teorema de Bolzano está ligado de muito perto ao Axioma do Supremo, e a demonstração que passamos a apresentar ilustra bem esse facto:

Demonstração. Temos $a, b \in I$ com $f(a) \neq f(b)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Supomos que $f(a) < \alpha < f(b)$ (o caso $f(a) > f(b)$ é inteiramente análogo), e consideramos o conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < \alpha\}.$$

É evidente que A é limitado, porque é subconjunto de $[a, b]$, e não vazio, porque $a \in A$. Segue-se do Axioma do Supremo que tem supremo c, e notamos que $a \leq a \leq b$, donde f é contínua em c.

Para mostrar que $f(c) = \alpha$, eliminamos as hipóteses alternativas $f(c) > \alpha$ e $f(c) < \alpha$, usando o Teorema 2.8.7:

- Se $f(c) - \alpha > 0$ então a função contínua dada por $g(x) = f(x) - \alpha$ satisfaz $g(c) > 0$, e existe uma vizinhança de c onde $g(x) > 0$, ou seja, onde $f(x) > \alpha$. Esta alternativa é impossível, porque qualquer vizinhança de c contém pontos de A, i.e., contém pontos onde $f(x) < \alpha$.

- Se $f(c) - \alpha < 0$ então a função contínua dada por $h(x) = \alpha - f(x)$ satisfaz $h(c) > 0$, e existe uma vizinhança de c onde $h(x) > 0$, ou seja, onde $f(x) < \alpha$. Esta alternativa também é impossível, porque esta vizinhança conteria também pontos de A maiores do que c, que é o supremo de A.

□

O Teorema de Bolzano mostra igualmente que "*as funções contínuas transformam intervalos em intervalos*". Deixamos como exercício verificar que

Corolário 2.9.3. *Se f é contínua no intervalo I então $f(I)$ é um intervalo.*

Um outro corolário interessante do Teorema do Valor Intermédio é o seguinte:

Corolário 2.9.4. *Se f é contínua no intervalo I, então f é injectiva em I se e só se é estritamente monótona em I.*

Demonstração. Deve ser evidente que qualquer função estritamente monótona é injectiva. Para mostrar que se f é contínua e injectiva então f é estritamente monótona, supomos que $a, b \in I$ e $a < b$, donde $f(a) \neq f(b)$. Analisamos apenas o caso $f(b) > f(a)$, que é em tudo análogo à alternativa $f(b) < f(a)$. Naturalmente, esta alternativa corresponde ao caso em que f é estritamente crescente em I. Mostramos sucessivamente:

(1) $a < c < b \Rightarrow f(a) < f(c) < f(b)$: Em alternativa, temos $f(c) < f(a)$ ou $f(c) > f(b)$. No 1º caso, a equação $f(x) = f(a)$ tem soluções $x \in [c, b]$ (com $x \neq a$), o que contraria a injectividade de f. No 2º caso, a equação $f(x) = f(b)$ tem soluções em $[a, c]$, o que é igualmente impossível.

(2) $c < a \Rightarrow f(c) < f(a) < f(b)$: Em alternativa, temos $f(a) < f(c) < f(b)$ ou $f(c) > f(b)$. No 1º caso, a equação $f(x) = f(c)$ tem soluções $x \in [a, b]$, com $x \neq c$, o que contraria a injectividade de f. No 2º caso, a equação $f(x) = f(b)$ tem soluções em $[c, a]$, o que é igualmente impossível.

(3) Temos analogamente que $c > b \Rightarrow f(c) > f(b) > f(a)$, e podemos muito facilmente concluir que se $c < d$ então $f(c) < f(d)$, independentemente da relação de c e d com o intervalo $[a, b]$.

□

Uma consequência também interessante destes resultados é o seguinte, que mostra que *a inversa de uma função contínua é também uma função contínua.*

Corolário 2.9.5. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua e injectiva no intervalo I e $J = f(I)$ então a sua inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo J.*

Demonstração. Supomos que $b = f(a)$ com $a \in I$, e passamos a mostrar que f^{-1} é contínua em $b \in J$. Sabemos do corolário anterior que f é estritamente monótona, e supomos para simplificar que f é crescente (o caso decrescente é inteiramente análogo). Demonstramos o resultado apenas no caso em que a não é um extremo do intervalo I, donde se segue facilmente que b também não é extremo de J.

Dado $\epsilon > 0$, o conjunto $K = V_\epsilon(a) \cap I$ é um intervalo, e $f(K) = L$ é igualmente um intervalo. Temos $b \in L$, porque $a \in K$, e b não é extremo de L, porque a não é extremo de K. Existe por isso $\delta > 0$ tal que $V_\delta(b) \subseteq L$, donde $f^{-1}(V_\delta(b)) \subseteq f^{-1}(L) = K \subseteq V_\epsilon(a)$. Por outras palavras,

$$x \in V_\delta(b) \Rightarrow f^{-1}(x) \in V_\epsilon(a),$$

e f^{-1} é contínua em b.

Os casos em que a e b são extremos dos intervalos I e J é semelhante, mas ligeiramente mais trabalhoso, porque os limites em causa são laterais. $\square$

Exemplos 2.9.6. Este resultado permite-nos indicar múltiplos exemplos de funções contínuas.

(1) A função seno é estritamente crescente em $I = [-\pi/2, \pi/2]$ e é como sabemos contínua em $\mathbb{R}$. A sua restrição ao intervalo I é portanto uma função contínua injectiva, que tem uma *inversa contínua* definida em $\text{sen}(I) = [-1, +1]$. Essa é a função arcsen : $[-1, +1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. O seu gráfico está representado na Figura 2.13.

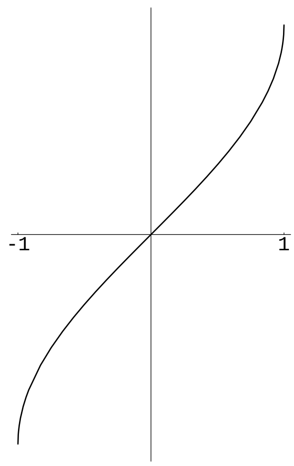


Figura 2.13: Gráfico da função trigonométrica inversa arco seno.

(2) A função coseno é estritamente decrescente em $J = [0, \pi]$ e é também contínua em $\mathbb{R}$. A sua restrição ao intervalo J é portanto uma função

contínua injectiva, que tem uma *inversa contínua* definida em $\cos(J) = [-1, +1]$. Essa é a função arccos : $[-1, +1] \to [0, \pi]$.

(3) A função tangente é estritamente crescente em $I = [-\pi/2, \pi/2]$ e contínua em I. A sua restrição ao intervalo I é portanto uma função contínua injectiva, que tem uma *inversa contínua* definida em $\tan(I) = \mathbb{R}$. Essa é a função arctan : $\mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$. O seu gráfico está representado na Figura 2.14.

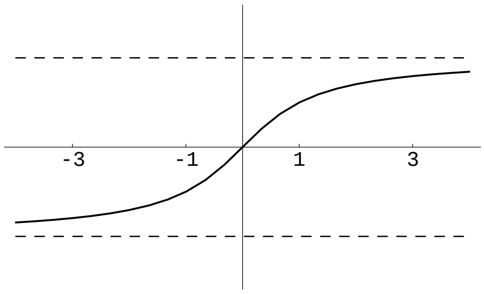


Figura 2.14: Gráfico da função trigonométrica inversa arco tangente.

(4) As funções $f_n(x) = x^n$ são contínuas e estritamente crescentes em $I = [0, +\infty[$, e $f_n(I) = I$. As suas inversas, que designamos $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$, são igualmente contínuas e estritamente crescentes em I. Os gráficos das funções f_3 e g_3, esta última a usual *raíz cúbica*, estão representados na Figura 2.15.

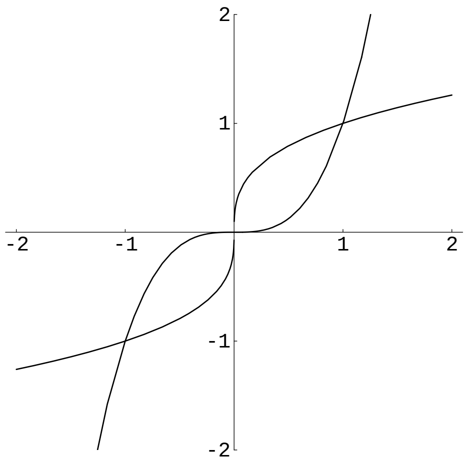


Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = x^3$, e da sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

(5) Como a exponencial é inversa do logaritmo, a sua continuidade pode ser estabelecida provando apenas a continuidade da função logaritmo.

(6) Podemos igualmente definir inversas para as funções hiperbólicas. Por exemplo, como o seno hiperbólico é estritamente crescente e contínuo em $\mathbb{R}$ e $\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, tem uma função inversa contínua $\operatorname{argsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Note-se que esta função é já conhecida, porque um cálculo simples mostra que
$$\operatorname{argsenh}(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

O Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano é válido para qualquer função contínua num intervalo, independentemente da natureza desse intervalo. Os próximos resultados são no entanto válidos apenas para funções contínuas em intervalos LIMITADOS E FECHADOS.

Proposição 2.9.7. *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$, então f é limitada em I, i.e., a imagem $f(I)$ é um conjunto limitado.*

Geometricamente, este resultado diz que o gráfico de f está entre duas rectas horizontais. Repare-se também que, pelo corolário 2.9.3, a imagem $f(I)$ é necessariamente um *intervalo* limitado.

Exemplos 2.9.8. É essencial neste teorema que o intervalo em causa seja tanto limitado como fechado.

(1) Consideramos a função f definida em $I =]0, 1]$ por $f(x) = 1/x$. É claro que f é contínua no intervalo limitado I mas $f(x) \to +\infty$ quando $x \to 0^+$, e portanto f não é limitada.

(2) A função g definida em $I = [0, \infty[$ por $g(x) = x$ é contínua em I, e I é um intervalo fechado (mas ilimitado). Esta função é contínua em I mas não é limitada em I.

A proposição 2.9.7 está também estreitamente relacionada com o Axioma do Supremo, mas optamos na sua demonstração por recorrer ao Princípio do Encaixe, e argumentar por contradição.

Demonstração. Supomos que f não é limitada em $I = [a, b]$, e passamos a definir uma sucessão de *intervalos encaixados* $I_1, I_2, \cdots$ tais que f não é limitada *em nenhum* intervalo I_n.

Tomamos naturalmente $I_1 = I$. Para definir I_2, consideramos o ponto médio $c = (a + b)/2$, e os dois subintervalos correspondentes à esquerda e à direita de c, ou seja, $E_1 = [a, c]$ e $D_1 = [c, b]$. Observamos que f é ilimitada em *pelo menos um* dos subintervalos E_1 ou D_1, porque caso contrário seria limitada em I_1, contrariando a nossa hipótese. Seleccionamos I_2 igual a E_1 ou D_1 de forma a garantir que f é ilimitada em I_2.

Notamos que este procedimento pode ser utilizado indefinidamente, porque se aplica a um qualquer intervalo I_n onde f seja ilimitada. Existe portanto uma sucessão de intervalos encaixados I_n tais que f é ilimitada em $I_n = [a_n, b_n]$, e o nosso procedimento mostra que $b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1}$.

De acordo com o Princípio do Encaixe existe um elemento c tal que $c \in I_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Claro que $c \in I$, e portanto f é contínua em c. De acordo com o Teorema 2.8.9, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $V_\delta(c) \cap I$.

Para obter uma contradição, notamos que para n suficientemente grande temos $(b-a)/2^{n-1} < \delta$, donde $I_n \subset V_\delta(c) \cap I$, e concluímos que f é limitada em I_n, o que é impossível. $\square$

Se f é contínua no intervalo limitado e fechado I então a proposição anterior mostra que $f(I)$ é um conjunto limitado, e pelo Axioma do Supremo segue-se que $f(I)$ tem *supremo e ínfimo*, ou seja, f tem supremo e ínfimo em I. O próximo teorema mostra que f na verdade assume esses valores em I, que são portanto o seu *máximo e mínimo.* Este resultado tem assim um papel fundamental na determinação de máximos e mínimos de funções, porque permite estabelecer a sua existência com base em ideias muito gerais.

Teorema 2.9.9. (Teorema de Weierstrass) *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$, então f tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

Demonstração. Vamos mostrar que f tem máximo. A demonstração que f tem mínimo é inteiramente análoga. Note-se mais uma vez o papel desempenhado pelo Axioma do Supremo.

Consideremos a imagem $f(I) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ Este conjunto é óbviamente não vazio e, pela proposição 2.9.7, é limitado. Pelo Axioma do Supremo existe $M = \sup C$, e temos que provar que $M \in f(I)$, pois isso significa que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M \geq f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$.

Argumentamos por contradição, supondo que $M \neq f(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$. Então podemos definir a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Esta função é contínua no intervalo limitado e fechado I, porque o denominador é uma função contínua em I que não se anula em I. Pela proposição 2.9.7 a função g é também limitada, e em particular existe $K > 0$ tal que

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < K \text{ donde } M - f(x) > 1/K \text{ e } f(x) < M - 1/K.$$

Mas neste caso $M - 1/K$ é um majorante de f inferior ao seu supremo, o que é absurdo. $\square$

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Teorema de Weierstrass: "*as funções contínuas transformam intervalos limitados e fechados em intervalos limitados e fechados*".

Corolário 2.9.10. *Se f é contínua no intervalo limitado e fechado I então $f(I)$ é um intervalo limitado e fechado.*

Capítulo 3

Derivadas

3.1 Derivada de Uma Função num Ponto

A noção de *derivada* de uma função é uma das mais fundamentais do Cálculo, e é uma das principais razões para a introdução e estudo da noção de *limite*. Tem múltiplas aplicações noutras áreas científicas e tecnológicas, onde é rotinamente utilizada para a definição de conceitos básicos, como os de velocidade, aceleração, potência, intensidade de corrente, para citar alguns dos mais usuais em domínios da engenharia, mas é inevitável mesmo em campos onde a quantificação é mais recente, como na economia.

É indispensável reconhecer que, independentemente da variedade de aplicações da noção de derivada, todas se podem reduzir a um problema geométrico simples de enunciar: *a determinação da recta tangente a uma curva num dado ponto*. Do nosso ponto de vista, que é o estudo de funções reais de variável real, o problema pode ser ainda mais especializado, para tomar a seguinte forma: *dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e um ponto $P = (a, f(a))$ do seu gráfico G, qual é a recta tangente a G em P?* É evidente que a equação desta recta, se não for vertical, é certamente da forma

$$y - f(a) = m \cdot (x - a),$$

e portanto mesmo esta última questão se reduz ao *cálculo do declive m desta recta.*

No caso de curvas particularmente simples, como as cónicas (circunferências, elipses, parábolas e hipérboles), este problema pode ser resolvido por técnicas algébricas, porque, nestes casos, a curva e uma sua tangente partilham apenas o ponto de tangência em causa.

Exemplo 3.1.1. Considere-se a parábola de equação $y = x^2$, e um seu ponto genérico $P = (a, a^2)$. A recta de declive m que passa por P tem equação $y - a^2 = m(x - a)$, ou $y = mx + a^2 - ma$, e intersecta a parábola nos pontos de abcissa x, onde x é solução de $x^2 = mx + a^2 - ma$. Esta é a equação quadrática $x^2 - mx - a^2 + ma = 0$, e as suas soluções são dadas por

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4(ma - a^2)}}{2} = \frac{m \pm \sqrt{(m-2a)^2}}{2} = \frac{m \pm (m-2a)}{2}.$$

É claro que a recta de declive m intersecta a parábola em dois pontos, com abcissas $x = a$ e $x = m - a$, excepto se $m = 2a$, *excepto quando* $m - a = a$. Neste caso, a recta em causa intersecta a parábola no *único* ponto com $x = a$, i.e., em P, e portanto só pode ser a *tangente* à parábola no ponto P.

Na terminologia do Cálculo Diferencial, diremos que a função dada por $f(x) = x^2$ tem derivada no ponto $x = a$, e o valor dessa derivada é $2a$. A derivada de f no ponto a designa-se por $f'(a)$, e escrevemos portanto $f'(a) = 2a$. Note-se que deste ponto de vista *a derivada da função f é uma nova função f'*, e no caso deste exemplo $f'(x) = 2x$.

Estas técnicas algébricas não são suficientemente gerais para poderem ser usadas na definição de derivada. A ideia que seguimos, e que foi descoberta no período da criação do Cálculo Diferencial e Integral (os séculos XVI e XVII), consiste em usar um procedimento faseado, sugerido na figura 3.1.

(1) Consideramos o ponto de tangência $P = (a, f(a))$, e um ponto "próximo" $Q = (a + h, f(a + h))$.

(2) Calculamos o declive da recta *secante* que passa pelos pontos P e Q, e que é dado por

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(3) Determinamos o *limite* do declive da recta secante quando $h \to 0$, ou seja, quando o ponto Q tende para P. É este limite, quando existe, que é a *derivada* de f em a.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De um ponto de vista intuitivo, a recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a)$ é assim obtida como o "limite" de rectas secantes convenientemente escolhidas, todas passando pelo ponto de tangência.

Exemplo 3.1.2. Retomando o exemplo da função $f(x) = x^2$ acima, temos então

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a$$

Por vezes o limite acima escreve-se com uma mudança de variáveis simples ($x = a + h$, ou $h = x - a$). Introduzimos agora formalmente

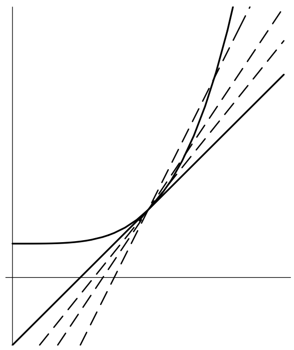


Figura 3.1: A recta tangente como limite de rectas secantes.

Definição 3.1.3 (Derivada de uma função real de variável real)**.** Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio que é também ponto de acumulação de D. Dizemos que f é DIFERENCIÁVEL NO PONTO $a \in D$ com DERIVADA $f'(a)$ se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Sendo $A \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que f é DIFERENCIÁVEL em A se f é diferenciável em qualquer ponto $ainA$.

Insistimos aqui em algumas observações importantes:

- O cálculo da derivada de f, que se chama *diferenciar* ou *derivar* f, produz na realidade uma nova função, presumivelmente com um domínio que pode ser menor do que o de f. A *derivada* de f sem mais qualificativos é esta nova função, que designamos f'.

- A definição de derivada, se bem que sugerida por considerações intuitivas a propósito de rectas tangentes, é na verdade utilizada para *definir*, desta vez com rigor, a própria noção de recta tangente. Por outras palavras,

  Definição 3.1.4. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A RECTA TANGENTE AO GRÁFICO de f no ponto $(a, f(a))$ é a recta com equação

  $$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a). \tag{3.1}$$

- Interpretámos até aqui a derivada de f no ponto a como o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a)$, porque essa interpretação é sempre possível e razoável. Mas em cada caso concreto a sua correcta interpretação "física" depende exclusivamente da grandeza representada (ou modelada) pela função f. Como sugerimos acima, as seguintes interpretações/definições são muito comuns:

- Se $x(t)$ representa a posição no instante de tempo t de um objecto em movimento rectilíneo, então a razão:

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

é a *velocidade média* do objecto no intervalo de tempo $[t, t+h]$. A derivada

$$x'(t) = v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

define a VELOCIDADE INSTANTÂNEA do objecto no instante t.

- Se $q(t)$ representa a carga eléctrica total que atravessou um dado ponto de medição num condutor eléctrico até ao instante de tempo t, então a razão:

$$\frac{q(t+h)-q(t)}{h}$$

é a *quantidade de carga transportada por unidade de tempo* no intervalo $[t, t+h]$. A derivada

$$q'(t) = i(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

define a INTENSIDADE DE CORRENTE no instante t.

- Se $C(x)$ representa o custo total de produção de x unidades de um determinado produto, incluindo aqui custos como os de investigação e desenvolvimento, de construção da correspondente unidade fabril, e dos materiais utilizados na produção de novas unidades, então a razão:

$$\frac{C(x+h)-C(x)}{h}$$

é a *custo médio de produção por unidade produzida, depois de já produzidas x*. Este custo médio em geral baixa à medida que x aumenta, no que se chama "economia de escala". A derivada

$$C'(x) = c(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C(x+h)-C(x)}{h}$$

define o CUSTO MARGINAL depois de produzidas x unidades. É essencialmente o custo da unidade $x+1$ produzida.

Passamos a calcular as derivadas de algumas das funções introduzidas no capítulo anterior:

Exemplos 3.1.5.

(1) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \alpha x + \beta$, para $x \in \mathbb{R}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes. Como o gráfico de f é uma recta de declive α, o resultado do cálculo da sua derivada não é surpreendente:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(a+h) + \beta - (\alpha a + \beta)}{h} = \alpha.$$

Por outras palavras, a derivada f' é a função *constante* dada por $f'(x) = \alpha$. Em particular, a derivada de $f(x) = x$ é $f'(x) = 1$, e a derivada de uma função *constante* é a função nula.

(2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função seno, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Sabemos da alínea g) do teorema 2.2.4 que

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x) = 2 \operatorname{sen}(h/2) \cos(x + h/2).$$

Temos portanto que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(h/2)\cos(x+h/2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cdot \cos(x + h/2) = \cos(x).$$

Usámos na última igualdade o limite já conhecido $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$ e o facto do coseno ser uma função contínua. Concluímos assim que a função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$, e a sua derivada é a função coseno.

(3) O cálculo da derivada do coseno é em tudo análogo ao anterior. Recordamos que

$$\cos(x+h) - \cos(x) = -2\operatorname{sen}(h/2)\operatorname{sen}(x+h/2).$$

Temos portanto que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(h/2)\operatorname{sen}(x+h/2)}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cdot \operatorname{sen}(x+h/2) = -\operatorname{sen}(x).$$

Tornámos a usar o limite $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$ e, desta vez, a continuidade do seno. Concluímos que o coseno é diferenciável em $\mathbb{R}$, e a sua derivada é o simétrico do seno.

(4) Para diferenciar a função logaritmo, observamos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log((x+h)/x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h/x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log(1+h/x)}{h/x}=\frac{1}{x}$$

Usámos aqui o resultado já conhecido $\lim_{y\to 0}\log(1+y)/y=1$. A derivada da função $f(x)=\log(x)$ é portanto dada por $f'(x)=1/x$.

(5) Para diferenciar a função exponencial, observamos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

Usámos aqui que $\lim_{y\to 0}(e^y-1)/y=1$. A função exponencial tem assim a muita especial propriedade de ser igual à sua própria derivada, ou seja, satisfazer a *equação diferencial* $f'=f$.

(6) Para diferenciar uma potência, i.e., uma função da forma $f(x)=x^n$, com $n\in\mathbb{N}$, podemos por exemplo usar a factorização que já referimos, da forma

$$x^n-a^n=(x-a)\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}a^{k-1}.$$

Obtemos $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}a^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}a^{n-1}=na^{n-1}$

Usámos aqui que $\lim_{y\to 0}(e^y-1)/y=1$. A função exponencial tem assim a muita especial propriedade de ser igual à sua própria derivada, ou seja, satisfazer a *equação diferencial* $f'=f$.

Como a derivada de uma dada função f é uma nova função f', nada nos impede de aplicar novamente a operação de diferenciação, para obter a derivada de f', que designamos por f'' e dizemos ser a SEGUNDA DERIVADA de f, e assim sucessivamente. Mais precisamente, a DERIVADA DE ORDEM n da função f, ou n-ÉSIMA DERIVADA de f, define-se por recorrência:

- Derivada de ordem 1, ou primeira derivada de f: é a função $f^{(1)}=f'$, acima definida,
- Derivada de ordem $n+1$: é a função $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

Nesta notação, escrevemos ainda $f^{(0)}=f$.

Exemplo 3.1.6. Se f é a função exponencial, então a derivada $f^{(n)}$ existe para qualquer $n\in\mathbb{N}$, e temos sempre que $f^{(n)}=f$.

É por vezes conveniente representar derivadas usando a chamada *notação de Leibniz*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = f'(x).$$

Por exemplo, podemos escrever nesta notação que:

$$\frac{d}{dx}(\alpha x + \beta) = \alpha \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad (x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}); \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+); \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (x \in \mathbb{R});$$

Na notação de Leibniz, a derivada de ordem n da função f designa-se por

$$\frac{d^n f}{dx^n}.$$

Tal como fizémos a propósito da noção de continuidade, é possível considerar o problema do cálculo da derivada num dado ponto a tomando apenas limites laterais específicos.

Definição 3.1.7. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f tem *derivada lateral à direita* em a se existir o limite

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

(ii) f tem *derivada lateral à esquerda* em a se existir o limite

$$f'_e(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

Deve ser claro do correspondente resultado para limites em geral que

Teorema 3.1.8. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. f é diferenciável no ponto a se e só se f tem derivadas laterais iguais nesse ponto. Nesse caso, tem-se naturalmente que $f'_e(a) = f'(a) = f'_d(a)$.*

Exemplo 3.1.9. A função módulo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x < 0, \\ x\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 3.2, tem derivadas laterais no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

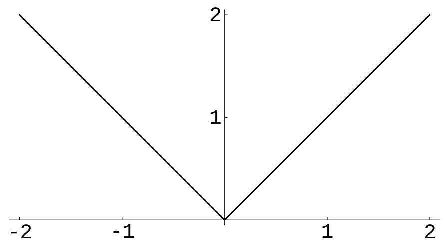


Figura 3.2: Gráfico da função módulo.

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1 \quad \text{e}$$
$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1\,.$$

Logo, $f'_e(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$ pelo que a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

É fácil verificar que as funções diferenciáveis são contínuas:

Teorema 3.1.10. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $a \in D$ então f é contínua em a.*

Dem. Considermos a função $E : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto $a \in D$, sabemos que

$$\lim_{x\to a} E(x) = 0.$$

Por outro lado,

$$E(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + xE(x).$$

Segue-se imediatamente que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \lim_{x\to a}(x-a)f'(a) + \lim_{x\to a} xE(x) = f(a)$$

pelo que f é contínua em $a \in D$. $\square$

Note-se que a função módulo do Exemplo 3.1.9, que é contínua no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto, mostra que a continuidade não implica em geral a diferenciabilidade. Por outro lado, o Teorema 3.1.10 é equivalente a afirmar que

$$f \text{ não é contínua em } a \Rightarrow f \text{ não é diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função de Heaviside não é contínua no ponto zero (Exemplo 2.8.6) pelo que também não é diferenciável nesse ponto.

Definição 3.1.11. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I =]a, b[$. Se existir a n-ésima derivada de f em todo o intervalo I, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que f *é uma função de classe* $C^n(I)$, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que f é uma função de classe $C^0(I)$ se f for contínua em I, e que f é uma função de classe $C^\infty(I)$ se $f \in C^n(I)\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observe-se a este respeito que se $f^{(n)}$ existe então todas as derivadas $f^{(k)}$ até à ordem n são contínuas pelo teorema 3.1.10. Ilustramos estas noções com alguns exemplos simples:

Exemplos 3.1.12.

(1) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ x^2\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que esta função é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2x\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta derivada f' é contínua em todo o $\mathbb{R}$. No entanto, f' não é diferenciável em $x = 0$, porque $f''_e(0) = 0 \neq 2 = f''_d(0)$, e

$$f''(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2\,, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Assim, temos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ mas $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

(2) A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada de f existe e é contínua em todo o $\mathbb{R}$:

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \text{dada por } f^{(n)}(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

3.2 Regras de Derivação

As seguintes regras de derivação são de utilização constante:

Teorema 3.2.1. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Seja ainda $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, as funções $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são diferenciáveis no ponto a, sendo as suas derivadas dadas por:*

(a) *Soma/diferença:* $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

(b) *Produto por constante:* $(cf)'(a) = cf'(a)$

(c) *Produto:* $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (Regra de Leibniz)

(d) *Quociente:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Nota 3.2.2. As duas primeiras regras algébricas de derivação enunciadas neste teorema, dizem-nos que a derivação é uma operação *linear*.

Dem. Provamos apenas a Regra de Leibniz, notando que $(f \cdot g)'(a)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} \left(g(a+h) \cdot \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = \\
&\lim_{h\to 0} g(a+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\
&g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)\,,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade se usou o facto de f e g serem diferenciáveis em a, bem como o facto de g ser também contínua em a (Teorema 3.1.10). □

Exemplos 3.2.3. Podemos aproveitar estes resultados para diferenciar outras funções trigonométricas.

(1) Como $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$, e as funções sen e coseno são diferenciáveis em $\mathbb{R}$, a função tan é diferenciável no seu domínio, e

$$(\tan x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

(2) Pela mesma razão, a secante é diferenciável no seu domínio, e

$$(\sec x)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = -\tan x \sec x$$

(3) Para diferenciar as funções hiperbólicas, notamos primeiro que

$$(e^{-x})' = (1/e^x)' = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$$

(4) Segue-se que

$$(\operatorname{senh}(x))' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)(\text{cf. Exemplo } 2.2.11).$$

(5) Temos analogamente que

$$(\cosh(x))' = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x).$$

(6) Note-se que as funções sen e cos satisfazem a *equação diferencial* $f'' = -f$, e as funções senh e cosh satisfazem a equação $f'' = f$.

(7) A diferenciação de polinómios é imediata:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \Longrightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k k x^{k-1}$$

É interessante notar também que neste caso

$$c_0 = f(0), c_1 = f'(0), 2c_2 = f''(0), \text{ em geral, } k!c_k = f^{(k)}(0)$$

(8) Derivada de qualquer logaritmo: Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a inversa da função $F(x) = a^x$ é a função LOGARITMO DE BASE a, designada $\log_a$. Como

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow x = e^{y\log(a)} \Leftrightarrow y\log(a) = \log(x)$$

Para calcular a derivada de $h(x) = \log_a(x) = \log(x)/\log(a)$, onde supomos $x > 0$, notamos que

$$h'(x) = (\log(x))'/\log(a) = \frac{1}{x\log(a)}$$

Continuamos com o nosso estudo de técnicas para o cálculo de derivadas, estudando a diferenciação de uma função composta, a que corresponde uma regra de derivação que se diz frequentemente "*regra da cadeia*".

3.3 Derivada de Funções Compostas

Teorema 3.3.1 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D_g$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in D_f$. Então, a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f\circ g}$ e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

Dem. Vamos assumir que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $h \in \,]-\delta, \delta[$ com $(a + h) \in D_g$, tem-se $g(a + h) \neq g(a)$. Caso contrário, prova-se facilmente que $g'(a) = 0 = (f \circ g)'(a)$ (exercício), o que confirma a validade do teorema.

Por definição, a derivada $(f \circ g)'(a)$ é dada por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a + h) - (f \circ g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{h}$$

Como $g(a + h) - g(a) \neq 0$, este último limite é também

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(g(a + h)) - f(g(a))) \cdot (g(a + h) - g(a))}{h \cdot (g(a + h) - g(a))} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{g(a + h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

Como g é por hipótese diferenciável em a, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} = g'(a)\,.$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a + h)$, em que $h \to 0 \Rightarrow y \to g(a) = b$ (porque, pelo Teorema 3.1.10, g é contínua em a), e usando o Teorema 2.5.6 referente ao limite de uma função composta, temos também que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{g(a + h) - g(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)\,,$$

onde se usou, na última igualdade, o facto de f ser por hipótese diferenciável no ponto $b = g(a)$.

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{g(a + h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \\ &= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.\end{aligned}$$

$\square$

Exemplos 3.3.2.

(1) Para calcular a derivada de $h(x) = \operatorname{sen}^5(x)$, escrevemos

$$h(x) = f(g(x)), \text{ onde } f(x) = x^5 \text{ e } g(x) = \operatorname{sen}(x)$$

Como $f'(x) = 5x^4$ e $g'(x) = \cos(x)$ temos então:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 5g(x)^4 \cos(x) = 5 \operatorname{sen}^4(x) \cos(x).$$

(2) Para calcular a derivada de $h(x) = \log(\cos(x))$, escrevemos

$$h(x) = f(g(x)), \text{ onde } f(x) = \log(x) \text{ e } g(x) = \cos(x)$$

Como $f'(x) = 1/x$ e $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ temos então:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

(3) Para calcular a derivada de $h(x) = e^{x^2}$, escrevemos

$$h(x) = f(g(x)), \text{ onde } f(x) = e^x \text{ e } g(x) = x^2$$

Como $f'(x) = f(x) = e^x$ e $g'(x) = 2x$ temos então:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)}2x = e^{x^2}2x.$$

(4) Derivada de qualquer exponencial: Para calcular a derivada de $h(x) = a^x$, onde supomos $a > 0$, recordamos que $a^x = e^{x \log(a)}$, i.e.,

$$h(x) = f(g(x)), \text{ onde } f(x) = e^x \text{ e } g(x) = x \log(a)$$

Como $f'(x) = f(x) = e^x$ e $g'(x) = \log(a)$ temos então:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)} \log(a) = e^{x \log(a)} \log(a) = a^x \log(a).$$

(5) Derivada de qualquer potência: Para calcular a derivada de $h(x) = x^a$, onde supomos $x > 0$, recordamos que $x^a = e^{a \log(x)}$, i.e.,

$$h(x) = f(g(x)), \text{ onde } f(x) = e^x \text{ e } g(x) = a \log(x)$$

Como $f'(x) = f(x) = e^x$ e $g'(x) = a/x$ temos então:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)}a/x = e^{a \log(x)}a/x = x^a a/x = ax^{a-1}.$$

Quando o expoente α do exemplo anterior é um número natural ou um inteiro negativo, a restrição $x > 0$ é supérflua! Na realidade, a função dada por $h(x) = x^n$ está definida em $\mathbb{R}$ se $n \in \mathbb{N}$ e em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $-n \in \mathbb{N}$, e em ambos os casos temos $h'(x) = nx^{n-1}$.

(6) A notação de Leibnitz é particularmente adaptada a cálculos desta natureza. Notamos primeiro que quando escrevemos, e.g., $y = f(x)$, é comum representar a derivada f' por $\frac{dy}{dx}$. Por exemplo, para diferenciar $y = \operatorname{sen}(x^2+1)$, é comum organizar os cálculos como se segue:

$$y = \operatorname{sen}(u), u = x^2 + 1 \text{ e } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos(u)(2x) = 2x\cos(x^2+1)$$

Claro que cometemos aqui diversos abusos da notação (por exemplo, "y" representa a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ou a função $\tilde{f}(x) = \operatorname{sen}(x^2+1)$?), mas efectivamente esta é uma maneira muito eficiente de proceder, sobretudo quando a "cadeia" de funções tem múltiplos "elos".

(7) Para diferenciar $f(x) = \operatorname{sen}(\log(\cos(x)))$, escrevemos:

$$y = \operatorname{sen}(u), u = \log(v), v = \cos(x) \text{ e } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \text{ donde}$$

$$\frac{dy}{du} = \cos(u), \frac{du}{dv} = \frac{1}{v}, \frac{dv}{dx} = -\operatorname{sen}(x) \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(u)\operatorname{sen}(x)}{v} = -\frac{\cos(\log(v))\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos(\log(\cos(x)))\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Vimos no Capítulo anterior que se f é uma função contínua injectiva num dado intervalo I, a sua inversa definida no intervalo $J = f(I)$ é igualmente uma função contínua. O próximo teorema mostra que se f é diferenciável e tem derivada diferente de zero então a inversa f^{-1} é também diferenciável, e apresenta uma fórmula para o cálculo da derivada de f^{-1}. Deve notar-se a este respeito que a fórmula em causa mais uma vez reflecte apenas a simetria do gráfico destas funções em relação à recta $y = x$.

Teorema 3.3.3. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo I, e seja $f^{-1} : f(I) \to I$ a sua inversa. Se f é diferenciável num ponto $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Dem. Sabemos que

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$$

Fazemos a mudança de variáveis $t = f^{-1}(x)$, onde $a = f^{-1}(b)$, e recordamos que f^{-1} é contínua, e $f^{-1}(x) \to a$ quando $x \to b = f(a)$, para concluir que

$$\lim_{x\to b} \frac{f(f^{-1}(x)) - f(a)}{f^{-1}(x) - a} = \lim_{x\to b} \frac{x - b}{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)} = f'(a)$$

Como $f'(a) \neq 0$, segue-se que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

$\square$

Exemplos 3.3.4. Usamos o resultado anterior para diferenciar mais um conjunto importante de funções.

(1) Derivada de arcsen: Neste caso, $f^{-1} = \text{arcsen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, e a derivada de $f = \text{sen}$ só se anula no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ nos pontos $a = \pm\pi/2$, que correspondem a $b = \pm 1$. Portanto a função arcsen é diferenciável em $]-1, 1[$, e temos

$$(\text{arcsen})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Para calcular $\cos(\text{arcsen}(x))$, basta notar que, com $\theta = \text{arcsen}(x)$,

$$\text{sen}(\theta) = x \Rightarrow \cos^2(\theta) = 1 - \text{sen}^2(\theta) = 1 - x^2 \Rightarrow \cos(\theta) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Como $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, segue-se que $\cos(\theta) > 0$, e portanto

$$\cos(\text{arcsen}(x)) = \cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(2) Derivada de arctan: Neste caso, $f^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, e a derivada de $f = \tan$, que é $\sec^2 = 1/\cos^2$, nunca se anula no intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$. Portanto a função arctan é diferenciável em $\mathbb{R}$, e temos

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Para calcular $\cos^2(\arctan(x))$, basta notar que, com $\theta = \arctan(x)$,

$$\frac{\text{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \tan^2(\theta) = x^2 \Rightarrow \frac{1 - \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = x^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + x^2.$$

(3) Derivada de arccos: Neste caso, $f^{-1} = \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, e a derivada de $f = \cos$, que é $f' = -\text{sen}$, só se anula no intervalo $[0, \pi]$ nos pontos $a = 0$ e $a = \pi$, que correspondem a $b = \pm 1$. Portanto a função arccos é diferenciável em $]-1, 1[$, e temos

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\text{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Para calcular $\text{sen}(\arccos(x))$, tomamos $\theta = \arccos(x)$, donde

$$\cos(\theta) = x \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 1 - \text{sen}^2(\theta) \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Como $0 < \theta < \pi$, segue-se que $\text{sen}(\theta) > 0$, e portanto

$$\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(4) Derivada da raíz-n: Neste caso, f é dada por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Se n é ímpar podemos tomar $I = \mathbb{R}$ e $f, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas se n é par temos que restringir f a $I = [0, \infty[$, e $f, f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$. A derivada de f é dada por $f'(x) = nx^{n-1}$, e só se anula em $a = 0$, que corresponde a $b = 0$. Portanto a função inversa é diferenciável em $I \setminus \{0\}$, e temos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

Esta é a usual regra para a derivação de potências, para expoentes da forma $1/n$. Combinando esta regra com a da diferenciação da função composta, podemos mostrar que a regra da diferenciação de potências é válida para qualquer expoente *racional*, sem invocar quaisquer propriedades das funções exponencial e logarítmica.

(5) Derivadas das funções hiperbólicas inversas: Deixamos como exercício verificar que as derivadas das funções argsenh e argcosh são dadas por:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argsenh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ e } \frac{d}{dx}\operatorname{argcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3.4 Os Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy

Uma das aplicações mais relevantes do cálculo de derivadas é a determinação de *extremos locais* de uma função dada, e começamos por recordar definições e resultados básicos associados a esta ideia.

Definição 3.4.1. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D$ um ponto do seu domínio. Então

(a) f tem um MÁXIMO LOCAL EM c se e só se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para qualquer $x \in V_\delta(c) \cap D$.

(b) f tem um MÍNIMO LOCAL EM c se e só se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x \in V_\delta(c) \cap D$.

Dizemos também que f tem um EXTREMO LOCAL EM c se e só se f tem um máximo ou mínimo locais em $c \in D$.

Note-se que o máximo e mínimo de f em D, se existirem, são obviamente extremos locais, mas dizem-se usualmente os extremos GLOBAIS, ou ABSOLUTOS, de f no domínio D.

De um ponto de vista intuitivo, é claro que a recta tangente ao gráfico de uma função num ponto de extremo local é necessariamente horizontal, desde que exista, ou seja, desde que a função em causa seja diferenciável no extremo local. É este o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 3.4.2. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I =]a, b[$. Se f tem um extremo local num ponto $c \in I$ e f é diferenciável nesse ponto c, então $f'(c) = 0$.*

Dem. Supomos que f tem um máximo local no ponto $c \in I =]a, b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local). Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0\,, \ \forall\, x \in V_\delta(c) =]c - \delta, c + \delta[\ .$$

Se $c - \delta < x < c$, temos então $f(x) - f(c) \leq 0$ e $x - c < 0$, donde

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ e } f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Analogamente, se $c < x < c + \delta$, então $f(x) - f(c) \leq 0$ e $x - c > 0$, donde

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ e } f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto c, podemos concluir que

$$0 \leq f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0, \text{ ou seja, } f'(c) = 0.$$

□

Um ponto c onde $f'(c) = 0$ chama-se um PONTO CRÍTICO de f. Como acabámos de provar, um extremo local de uma função definida num intervalo aberto é um ponto crítico, *se ocorre num ponto onde a função é diferenciável*, mas é fácil dar exemplos de pontos críticos que não são extremos locais. Deve ser também claro que os extremos podem ocorrer em pontos onde a função não é diferenciável, e que por isso não são pontos críticos. Mais precisamente, e se f está definida num intervalo *fechado* $[a, b]$ e tem um extremo local em $x = c$, então uma das seguintes alternativas é necessariamente verdade:

1. $a < c < b$ e $f'(c)$ não existe, ou
2. $a < c < b$ e $f'(c) = 0$, ou
3. $c = a$ ou $c = b$

Exemplos 3.4.3.

(1) A função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na Figura 3.3, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero, ou seja, 0 é ponto crítico de f, mas f não tem um extremo local nesse ponto.

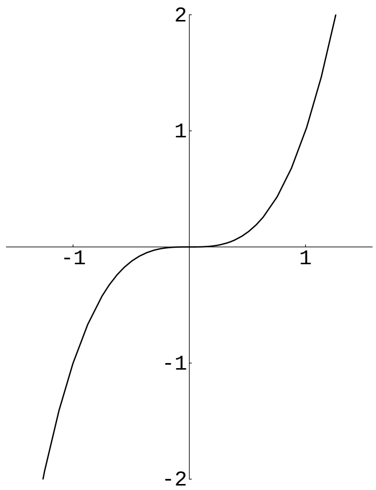


Figura 3.3: Gráfico da função dada por $f(x) = x^3$.

(2) A função *módulo* $g : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|$ tem mínimo (absoluto) no ponto zero (onde não é diferenciável). Tem um máximo local em $x = -1$ e máximo absoluto em $x = 2$. Nenhum dos seus extremos ocorre em pontos críticos.

(3) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então pelo Teorema de Weierstrass sabemos que f tem máximo e mínimo em $I = [a, b]$. Claro que o máximo e o mínimo são em particular extremos locais, e portanto as observações 1 a 3 aplicam-se aos pontos onde ocorrem. A título de ilustração, seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3 - x$. Esta função tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$ para todo o $x \in [-1, 2]$. Portanto, o máximo e o mínimo só podem ocorrer em pontos críticos (onde $f'(x) = 0$), ou nos extremos $x = -1$ ou $x = 2$, porque não existem pontos do primeiro tipo a considerar. Como

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ e temos } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in \,]-1, 2[\,,$$

o máximo e o mínimo de f no intervalo $[-1, 2]$ ocorrem certamente num dos pontos $-1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 2$, e observamos que

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 6.$$

Concluímos que o máximo de f é $f(2) = 6$ e o mínimo é $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Conforme observámos no último exemplo, o Teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo globais de uma função contínua num intervalo limitado e fechado. Se a função for além disso diferenciável, e garantirmos que o máximo e o mínimo não podem ocorrer apenas nos extremos do intervalo, podemos concluir que a *derivada* se anula pelo menos uma vez no intervalo em questão. O Teorema de Rolle formaliza esta ideia, que a figura 3.4 ilustra: se $f(a) = f(b)$, *então existe pelo menos um ponto entre a e b onde o gráfico de f tem uma tangente horizontal.*

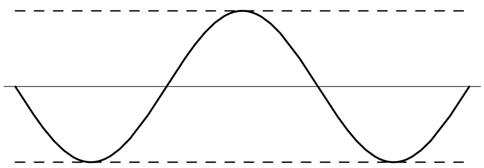


Figura 3.4: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle.

Teorema 3.4.4. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Como f está nas condições do Teorema 2.9.9 - Weierstrass, sabemos que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$:

$$M = \max_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f \, .$$

Se $M = m$, então f é uma função constante em $[a, b]$ pelo que

$$f'(c) = 0 \, , \ \forall \, c \in \,]a, b[\ .$$

Se $M > m$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ implica que pelo menos um dos valores M ou m seja assumido por f num ponto $c \in \,]a, b[$. Temos então que f tem um extremo nesse ponto c. Como f é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema 3.4.2 para concluir que então $f'(c) = 0$. □

O Teorema de Rolle especializa-se por vezes ao caso em que $f(a) = f(b) = 0$, de que resulta a seguinte observação:

Corolário 3.4.5. *Entre dois zeros de uma função diferenciável, existe sempre pelo menos um zero da sua derivada*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.4.4 a uma função f, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = 0 = f(b)$. □

É difícil subestimar a relevância do Teorema de Lagrange para o Cálculo, porque é efectivamente um dos seus resultados mais centrais. No entanto, é apenas uma engenhosa adaptação do teorema de Rolle, que resulta de eliminar a suposição $f(a) = f(b)$. O Teorema garante que existe uma tangente ao gráfico num ponto intermédio c, com $a < c < b$, que é *paralela à corda* que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, tal como ilustrado na figura 3.5. Note-se que o Teorema de Rolle é o caso especial do Teorema de Lagrange quando $f(a) = f(b)$, quando a referida corda é evidentemente horizontal, e portanto a tangente em causa tem declive nulo.

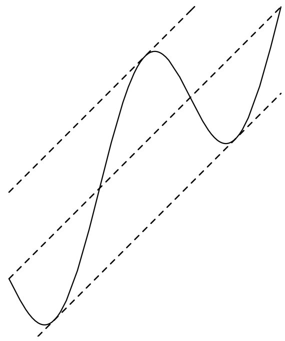


Figura 3.5: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.

Teorema 3.4.6. (Teorema de Lagrange) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in\,]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Dem. Tomamos

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ e } g(x) = f(x) - \lambda x.$$

Temos assim que

$$g(b) - g(a) = f(b) - \lambda b - (f(a) - \lambda a) = f(b) - f(a) - \lambda(b - a) = 0$$

Notamos que $g'(x) = f'(x) - \lambda$, e aplicamos o Teorema de Rolle à função g, que satisfaz $g(b) = g(a)$, para concluir que existe $c \in\,]a, b[$ tal que

$$g'(c) = 0, \text{ ou seja, } f'(c) - \lambda = 0, \text{ donde } f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

□

O Teorema de Cauchy é mais um resultado análogo aos Teoremas de Rolle e de Lagrange.

Teorema 3.4.7 (Teorema de Cauchy)**.** *Sejam f e g funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciáveis em $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Dem. Notamos que $g(b) \neq g(a)$, porque $g'(x) \neq 0$, e escrevemos

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

Definimos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)$, donde

$$\varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a) - \lambda(g(b) - g(a)) = 0.$$

Como φ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$, e notamos que

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

□

Repare-se que o Teorema de Cauchy é uma generalização do Teorema de Lagrange, porque se reduz a este último quando $g(x) = x$. Por outro lado, e tal como o Teorema de Lagrange, é um corolário directo do Teorema de Rolle.

O Teorema de Cauchy é particularmente útil para o cálculo de limites que conduzem a indeterminações. O próximo teorema, dito a "regra de Cauchy", contempla exactamente indeterminações dos tipos "0/0" ou "∞/∞".

Teorema 3.4.8. (Regra de Cauchy, 1ª versão) *Sejam f e g funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto $]a,b[$. Se $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a,b[$, e os limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} g(x)$ são ambos nulos, ou ambos infinitos, então,*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ se } \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe em } \overline{\mathbb{R}}.$$

Demonstração. Consideramos primeiro o caso em que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$. Prolongamos f e g por continuidade ao ponto $a \in \mathbb{R}$, fazendo $f(a) = 0 = g(a)$, e usamos o Teorema de Cauchy para concluir que, para cada $x \in]a,b[$, existe um $\xi \in]a,x[$, que depende de x, tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Como $x \to a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$, concluímos que $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

O caso em que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a^+} g(x)$ tem uma demonstração tecnicamente mais delicada, que apenas esboçamos aqui. Dados $x, y \in]a, b[$, onde supomos $x < y$, observamos do teorema de Cauchy que

Existe $\xi \in \,]x, y[$, *que depende de x e y*, tal que $\displaystyle\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

É fácil verificar que, como f e g têm limite infinito, e sendo y fixo,

$$(1)\ \lim_{x\to a^+}\frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)} = 1.$$

Por outro lado, é também fácil verificar que

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{(1 - g(y)/g(x))}{(1 - f(y)/f(x))}$$

Supomos que $f'(x)/g'(x) \to L$. Dado $\epsilon > 0$, temos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \Rightarrow q(x) \in V_\epsilon(L)$. Procedemos como se segue:

- Fixamos $y > a$ tal que, para $a < \xi < y$, temos $\displaystyle\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V_{\epsilon/2}(L)$.
- Determinamos $\epsilon' > 0$ tal que
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V_{\epsilon/2}(L) \text{ e } \frac{(1 - g(y)/g(x))}{(1 - f(y)/f(x))} \in V_{\epsilon'}(1) \Rightarrow q(x) \in V_\epsilon(L).$$
- De acordo com (1), existe $\delta > 0$ tal que
$$a < x < a + \delta < y \Rightarrow \frac{(1 - g(y)/g(x))}{(1 - f(y)/f(x))} \in V_{\epsilon'}(1).$$
- Concluímos que $a < x < a + \delta \Rightarrow \displaystyle\frac{f(x)}{g(x)} \in V_\epsilon(L)$.

□

Não demonstramos as versões deste teorema para limites $x \to -\infty$ (o caso anterior com $a = -\infty$), $x \to b^-$, e $x \to +\infty$. As demonstrações respectivas reduzem-se aliás com muita facilidade aos casos demonstrados acima, usando por exemplo mudanças de variáveis apropriadas. Os correspondentes resultados serão usados neste texto sem mais comentários. É também útil enunciar uma versão da regra de Cauchy aplicável a limites do tipo $x \to a$, que mais uma vez resulta de uma adaptação directa do resultado anterior.

Corolário 3.4.9. (Regra de Cauchy - 2ª versão) *Seja I um intervalo aberto e $a \in I$. Se f e g são funções definidas e diferenciáveis em $J = I \setminus \{a\}$, com $g'(x) \neq 0$ para $x \in J$, e os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$ *são ambos nulos, ou ambos infinitos, então,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \textit{ se } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \textit{ existe em } \overline{\mathbb{R}}.$$

Apresentamos a seguir alguns exemplos que ilustram a aplicação da regra de Cauchy ao levantamento de indeterminações de múltiplos tipos.

Exemplos 3.4.10.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x \cdot \log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

(5) Por indução, e usando o resultado anterior, temos $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

(6) Para calcular $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen}(x)\log(x)}$, basta-nos determinar

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{1/\operatorname{sen}(x)}.$$

Esta é uma indeterminação do tipo ∞/∞, e portanto aplicamos a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{1/\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x \cdot \cos(x)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen}(x)\log(x)} = e^0 = 1\,.$$

(7) Para calcular $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\log(\cos(x))/x^2}$, temos a determinar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2},$$

que é uma indeterminação do tipo $0/0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\log(\cos(x))/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

(8) É importante entender que existem com frequência múltiplas maneiras de aplicar a regra de Cauchy ao cálculo de limites, e que nem todas são igualmente eficientes. Por exemplo, para calcular

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},$$

existem pelo menos duas alternativas:

(a) Notamos que se trata de uma indeterminação do tipo $0/0$, e aplicamos a regra de Cauchy, na forma

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \cdots$$

É evidente que esta aplicação da regra de Cauchy não conduz a qualquer conclusão útil.

(b) Observamos que $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$, o que conduz a uma indeterminação do tipo ∞/∞:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

3.5 Extremos e Concavidade

O teorema de Lagrange permite identificar intervalos onde a função f é *monótona*, pela determinação do sinal algébrico de f', tal como descrevemos a seguir. Este estudo permite igualmente *classificar* os pontos críticos de f, ou seja, distinguir os que são máximos locais dos que são mínimos locais e dos que não são extremos.

Corolário 3.5.1. *Se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, então:*

(a) $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in\,]a, b[\Rightarrow f$ *é constante em* $[a, b]$*;*

(b) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in\,]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente crescente em* $[a, b]$*;*

(c) $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in\,]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente decrescente em* $[a, b]$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in\,]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\text{Logo, a função } f \text{ é } \begin{cases} \text{constante,} & \text{se } f' = 0; \\ \text{crescente,} & \text{se } f' > 0; \\ \text{decrescente,} & \text{se } f' < 0. \end{cases}$$

□

Exemplo 3.5.2. Consideremos a função $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já referimos no Exemplo 3.4.3.3. Vimos então que $f'(x) = 3x^2 - 1$ tem dois zeros (que são os pontos críticos de f) em $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Temos:

- $f'(x) > 0$ em $] - 1, -\frac{1}{\sqrt{3}})[$, logo f é crescente em $[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})]$;
- $f'(x) < 0$ em $] - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$, logo f é decrescente em $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;
- $f'(x) > 0$ em $]\frac{1}{\sqrt{3}}, 2[$, logo f é crescente em $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 2]$;

É claro que $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local de f.

O corolário 3.5.1 supõe a existência da derivada f' em todo o intervalo $]a, b[$. O próximo teorema é um resultado mais fraco, mas interessante, que requer apenas a existência de f' num dado ponto c. Compara $f(x)$ com $f(c)$ numa vizinhança de c.

Teorema 3.5.3. *Se f está definida num intervalo aberto I, $c \in I$, e $f'(c)$ existe, então:*

(a) Se $f'(c) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c \Rightarrow f(x) < f(c), \text{ e } c < x < c + \delta \Rightarrow f(c) < f(x)$$

(b) Se $f'(c) < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c \Rightarrow f(x) > f(c), \text{ e } c < x < c + \delta \Rightarrow f(c) > f(x)$$

Demonstração. Consideramos apenas o caso $f'(c) > 0$. Temos então que:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

É claro que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \neq c \text{ e } c - \delta < x < c + \delta \Longrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Se $x < c$ temos então $x - c < 0$ e $f(x) - f(c) < 0$ e se $x > c$ temos $x - c > 0$ e $f(x) - f(c) > 0$. □

É um pouco mais difícil mostrar que, nas condições do teorema 3.5.3, *não* podemos garantir que a função f é estritamente monótona numa vizinhança de c, uma observação que esclareceremos mais adiante, no exemplo 3.6.2.3. Aplicamos o teorema anterior com frequência na seguinte forma simplificada:

Corolário 3.5.4. *Se f está definida num intervalo aberto I, $c \in I$, $f(c) = 0$ e $f'(c) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V_\delta(c)$ onde o sinal algébrico de f muda precisamente no ponto c.*

Demonstração. Supondo que $f'(c) > 0$, temos do teorema anterior que $f(x) < 0$ quando $c - \delta < x < c$ e $f(x) > 0$ quando $c < x < c + \delta$. □

Se f é duas vezes diferenciável, o sinal da sua segunda derivada permite determinar a *concavidade* do gráfico da função, o que ajuda a esboçar o gráfico de f e a classificar os seus pontos críticos.

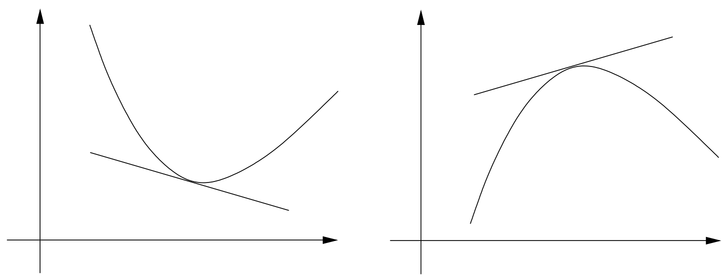


Figura 3.6: Função convexa (à esquerda) e côncava (à direita).

Definição 3.5.5. Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $c \in]a, b[$. Dizemos que

(a) f é CONVEXA em c, ou f tem a CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA em c, se o gráfico de f estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de c) por *cima* da *recta tangente* ao gráfico de f no ponto c. Ou seja, f é *convexa* em c se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - f(c) \geq f'(c) \cdot (x - c) \text{ para todo o } x \in]c - \delta, c + \delta[$$

(b) f é CÔNCAVA em c, ou f tem a CONCAVIDADE VOLTADA PARA BAIXO em c, se o gráfico de f estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de c) por *baixo* da *recta tangente* ao gráfico de f no ponto c. Ou seja, f é *côncava* em c se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - f(c) \leq f'(c) \cdot (x - c) \text{ para todo o } x \in \,]c - \delta, c + \delta[$$

(c) f tem um PONTO DE INFLEXÃO em c se existir $\delta > 0$ tal que f é convexa num dos intervalos $]c - \delta, c[$ ou $]c, c + \delta[$ e côncava no outro.

Teorema 3.5.6. *Seja f diferenciável em $]a, b[)$, $c \in \,]a, b[$ e suponha-se que $f''(c)$ existe. Então:*

(a) $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ é convexa em c;

(b) $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ é côncava em c;

Demonstração. Consideramos a função auxiliar $g : \,]a, b[\to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = (f(x) - f(c)) - f'(c) \cdot (x - c)\,, \;\forall\, x \in \,]a, b[\;.$$

Tendo em conta a Definição 3.5.5, temos que estudar o sinal desta função auxiliar g numa vizinhança de $c \in \,]a, b[$. Provamos apenas o caso (a), dado que o caso (b) é inteiramente análogo. Observamos primeiro que $g'(x) = f'(x) - f'(c)$ e $g''(c) = f''(c)$, donde

$$g(c) = g'(c) = 0 \text{ e } g''(c) > 0\,.$$

Pelo corolário 3.5.4 aplicado à derivada g', podemos então concluir que existe $\delta > 0$ tal que:

$$c - \delta < x < c \Longrightarrow g'(x) < 0 \text{ e } c < x < c + \delta \Longrightarrow g'(x) > 0$$

Pelo teorema 3.5.1, temos então que

$$g \text{ é crescente em }]c - \delta, c] \text{ e decrescente em } [c, c + \delta[.$$

Como $g(c) = 0$, é agora óbvio que $g(x) \leq 0$ para qualquer $x \in]c - \delta, c + \delta[$, ou seja, o gráfico de f está sob a tangente, e a sua concavidade está por isso para baixo. □

Note-se como óbvio que se f'' existe numa vizinhança de c e muda de sinal em c então c é um ponto de inflexão de f e um extremo local de f'.

O resultado anterior mostra igualmente que quando c é um ponto crítico de f e $f''(c) \neq 0$, a natureza do ponto crítico depende apenas do sinal algébrico de $f''(c)$:

Teorema 3.5.7. *Se f é diferenciável no intervalo $I =]a, b[$, $c \in I$ é um ponto crítico de f e $f''(c)$ existe então* *(a) Se $f''(c) > 0$, a função f tem um mínimo local em c;*

(b) Se $f''(c) < 0$, a função f tem um máximo local em c.

Demonstração. (a) Pelo teorema anterior, e sendo r a recta tangente ao gráfico de f no ponto c, existe uma vizinhança $V =]c - \epsilon, c + \epsilon[$ de c onde o gráfico de f está sob a recta r. Como a recta é horizontal, é óbvio que $f(x) \leq f(c)$ em V.
O caso (b) é exactamento análogo a (a). □

Exemplos 3.5.8.

(1) Voltamos ao exemplo $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente. Os pontos críticos de f são $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $f''(x) = 6x$, temos que:

$$f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0 \text{ e } f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0.$$

logo $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local. Esta mesma informação tinha sido obtida anteriormente analisando directamente o sinal da primeira derivada.

(2) Sabendo apenas que $f''(c) = 0$ nada podemos concluir sobre a natureza do ponto crítico c. Por exemplo, qualquer uma das funções $u(x) = x^3$, $v(x) = x^4$ e $w(x) = -x^4$ tem um ponto crítico em $x = 0$, e $u''(0) = v''(0) = w''(0)$. Deve ser óbvio que u não tem extremo em 0, v tem mínimo, e w tem máximo.

Em geral, o problema do traçado do gráfico de uma função f passa pela determinação de aspectos e características de f como:

- Os intervalos de monotonia e os extremos de f,
- A concavidade e inflexões de f, e
- As assímptotas de f.

A questão da determinação de assímptotas, a única que ainda não abordámos, é relativamente simples.

Definição 3.5.9 (Assímptotas)**.** Seja f uma função definida num intervalo num intervalo I.

(a) A recta $y = m \cdot x + p$ é uma ASSÍMPTOTA À ESQUERDA ao gráfico de f se e só se $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$

(b) A recta $y = m \cdot x + p$ é uma ASSÍMPTOTA À DIREITA ao gráfico de f se e só se $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$

(c) A recta $x = a$ é uma ASSÍMPTOTA VERTICAL do gráfico de f se e só se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ e/ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

No caso particular em que $m = 0$, diremos que o gráfico de f tem uma *assímptota horizontal à esquerda* (resp. *assímptota horizontal à direita*).

Passamos a descrever o processo de cálculo de assímptotas oblíquas.

Teorema 3.5.10. *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de f tem uma assímptota à esquerda (resp. direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$\text{(a)} \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{(b)} \quad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x)$$

$$\text{(resp.} \quad \text{(a)} \quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{(b)} \quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x)\,).$$

Nesse caso, a assímptota à esquerda (resp. direita) é única e tem equação

$$y = m \cdot x + p\,.$$

Demonstração. Faremos apenas o caso da assímptota à esquerda, sendo o da assímptota à direita completamente análogo.
($\Rightarrow$) Suponhamos que a recta de equação $y = mx + p$, $m, p \in \mathbb{R}$, é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. Então

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a função auxiliar φ, definida por

$$\varphi(x) = (f(x) - (m \cdot x + p))\ , \ \text{satisfaz} \ \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\,.$$

Temos então que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{mx + p + \varphi(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(m + \frac{p}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \right) = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} (p + \varphi(x)) = p \in \mathbb{R}\,,$$

pelo que os dois limites em causa existem e são finitos.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existem e são finitos os limites referidos em (a) e (b), com valores $m, p \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a recta de equação $y = mx + p$ é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. □

Note-se que a determinação de assímtotas oblíquas resume-se à execução de dois cálculos, para $a = +\infty$ e para $a = -\infty$:

- Verificar se os limites $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x}$ existem em $\mathbb{R}$.
- Sendo $m = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x}$, verificar se $\lim\limits_{x \to a} f(x) - mx$ existe em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.5.11. vamos estudar a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \cdot e^{1/x}$ e esboçar o seu gráfico.

(1) Intervalos de monotonia: A função f é diferenciável em $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com derivada $f' : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Como a exponencial é sempre positiva, a determinação do sinal algébrico de f' não tem quaisquer dificuldades:

$$f'(x) = \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[; \\ = 0\,, & \text{se } x = 1; \\ < 0\,, & \text{se } x \in \,]0, 1[; \end{cases}$$

logo concluímos que

$$f \text{ é } \begin{cases} \text{crescente}\,, & \text{em }]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[; \\ \\ \text{decrescente}\,, & \text{em }]0, 1[. \end{cases}$$

(2) Extremos: A função tem apenas um ponto crítico, em $x = 1$, que é obviamente um mínimo local. A origem $x = 0$ não pertence ao domínio da função!

(3) Concavidade e Inflexões: A derivada f' é também diferenciável em D, com derivada $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

Temos então que

$$f''(x) = \begin{cases} < 0\,, & \text{se } x \in \,]-\infty, 0[; \\ > 0\,, & \text{se } x \in \,]0, +\infty[; \end{cases} \Rightarrow f \text{ é } \begin{cases} \text{côncava}\,, & \text{em }]-\infty, 0[; \\ \text{convexa}\,, & \text{em }]0, +\infty[. \end{cases}$$

f NÃO tem pontos de inflexão ($x = 0$ não é um ponto de inflexão, porque não pertence ao domínio de f).

(4) Assímptotas verticais: Como f é contínua em D, o único ponto onde f pode ter uma assímptota vertical é o ponto zero. Temos que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0\,,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty\,.$$

A recta vertical $x = 0$ é por isso uma assímptota vertical ao gráfico de f.

(5) Assímptotas oblíquas: Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

as assímptotas oblíquas, se existirem, têm declive $m = 1$. Passamos a calcular

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x \cdot e^{1/x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

(onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x \to \pm\infty \Leftrightarrow y \to 0^\pm$). Concluímos que a recta de equação $y = x + 1$ é uma assímptota ao gráfico de f, tanto à direita como à esquerda.

A figura 3.7 apresenta o gráfico de f.

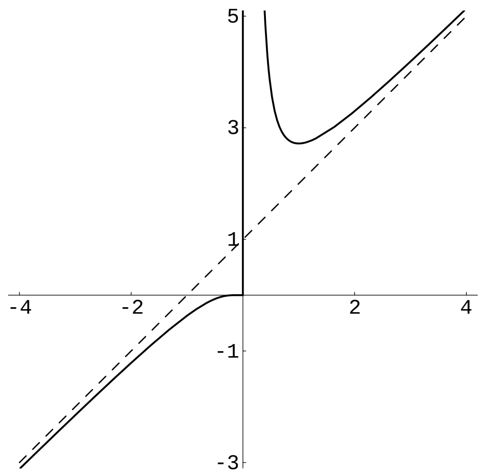


Figura 3.7: Esboço do gráfico do Exemplo 3.5.11.

3.6 As Funções Derivadas

É muito interessante observar que as funções que são derivadas de outras funções, ou seja, as funções $g = f'$, não são totalmente arbitrárias. Em particular, e como veremos, não sendo funções necessariamente contínuas, satisfazem sempre a propriedade do valor intermédio do teorema de Bolzano. Começamos por mostrar que se $f'(c)$ existe mas f' não é contínua em c, então pelo menos um dos limites laterais de f' em c não existe. Dito doutra forma, f' não pode ter dois limites laterais distintos em c.

Corolário 3.6.1. *Se f é uma função nas condições do Teorema de Lagrange e existe $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, também existe a derivada lateral $f'_d(a)$ e*

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)\,.$$

Se existe $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, também existe a derivada lateral $f'_e(b)$ e

$$f'_e(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)\,.$$

Demonstração. Para cada $x \in\,]a, b[$, sabemos pelo Teorema de Lagrange que existe um $\xi = \xi(x) \in\,]a, x[$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Como

$$a < \xi = \xi(x) < x \Rightarrow \lim_{x\to a+} \xi(x) = a^+\,,$$

podemos usar o Teorema 2.5.6, relativo ao limite de funções compostas, para concluir que

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi)\,.$$

$\square$

Apresentamos a seguir exemplos em que f' existe em $\mathbb{R}$ mas é efectivamente descontínua num ponto c.

Exemplos 3.6.2.

(1) Consideramos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x})\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$f'(x) = 2x\cdot\cos(\frac{1}{x}) + x^2\cdot(-\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))(-\frac{1}{x^2}) = 2x\cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}).$$

O limite de $f'(x)$ quando $x \to 0$ não existe, porque $2x \cdot \cos(1/x) \to 0$, mas $\operatorname{sen}(1/x)$ não tem limite. Na realidade, não existe nenhum dos limites laterais de f' quando $x \to 0$. No entanto, a função f é diferenciável no ponto zero e $f'(0) = 0$, como se pode verificar usando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos(\frac{1}{x}) = 0\,.$$

Concluímos assim que f é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, como o $\lim_{x \to 0} f'(x)$ não existe, esta função f' não é contínua no ponto zero. A função f é um exemplo de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ mas que não pertence a $C^1(\mathbb{R})$.

(2) No caso do exemplo anterior, a derivada f' não é contínua em $x = 0$, mas é *limitada* em vizinhanças da origem. Com uma ligeira modificação é possível eliminar esta característica, o que produz um exemplo que, como veremos, é muito relevante para entender certas dificuldades da Teoria da Integração. Consideramos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^2})\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$g'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x^2}) + \frac{2}{x} \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}).$$

O limite de $g'(x)$ quando $x \to 0$ não existe, porque $2 \operatorname{sen}(1/x^2)/x$ não tem limite. A função g é diferenciável no ponto zero e $g'(0) = 0$, porque:

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x^2})}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos(\frac{1}{x^2}) = 0\,.$$

Concluímos assim que g é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$. É claro que g' não é contínua no ponto zero, mas é fácil verificar que se I é uma qualquer vizinhança de zero então $g'(I) = \mathbb{R}$. Dito doutra forma, g' é ilimitada em *qualquer* vizinhança da origem.

(3) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos(\frac{1}{x}), & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$f'(x) = 1+2x\cdot\cos(\frac{1}{x})+x^2\cdot(-\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))(-\frac{1}{x^2}) = 1+2x\cos(\frac{1}{x})+\operatorname{sen}(\frac{1}{x}).$$

O limite de $f'(x)$ quando $x \to 0$ não existe, tal como no exemplo (1), mas a função f é diferenciável no ponto zero e $f'(0) = 1$.

Deve verificar-se que f não é estritamente crescente em nenhuma vizinhança de $x = 0$, mas, e de acordo com o teorema 3.5.3, temos $f(x) > f(0)$ para $x > 0$ e $f(x) < f(0)$ para $x < 0$, numa vizinhança apropriada da origem.

Relativamente à propriedade do valor intermédio, podemos provar:

Teorema 3.6.3. *Se f é diferenciável no intervalo I, $a, b \in I$, $a < b$, $f'(a) \neq f'(b)$, e α está entre $f'(a)$ e $f'(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \alpha$.*

Demonstração. Supomos que $\alpha = 0$ e $f'(a) < f'(b)$, deixando os restantes casos como exercício. Observamos primeiro que f é contínua em $J = [a, b]$, e tem por isso máximo e mínimo em J. Como $f'(a) < 0$, é claro do teorema 3.5.3 que o mínimo não ocorre em a. Da mesma forma, como $f'(b) > 0$, o mínimo também não ocorre em b. Segue-se que ocorre num ponto c entre a e b, e já sabemos que $f'(c) = 0$.

□

3.7 Polinómios de Taylor

Como se pode calcular, com precisão arbitrariamente grande, os valores de funções que temos vindo a referir, como as trigonométricas, a exponencial e o logaritmo? Como se pode calcular, por exemplo, a constante de Euler e, que é o valor de e^x quando $x = 1$, ou o clássico π, dado por $4\arctan(1)$? Passamos a explorar aqui *a aproximação de funções "arbitrárias" por polinómios* de um determinado tipo, ditos *polinómios de Taylor*, que permite responder a algumas destas questões.

A teoria que desenvolvemos é, em larga medida, uma aplicação directa do Teorema de Cauchy, e generaliza de forma muito interessante o problema da definição e cálculo da recta tangente ao gráfico de uma função diferenciável num dado ponto. Para entender esta observação, note-se que a recta tangente ao gráfico da função diferenciável f no ponto $(a, f(a))$ é simplesmente o gráfico do polinómio p_1 de grau ≤ 1 que coincide com f no ponto a, e que tem além disso a mesma *primeira* derivada nesse mesmo ponto. A generalização desta ideia corresponde a *determinar polinómios que coincidem com a função f em mais derivadas além da primeira*.

Começamos por um resultado muito simples sobre o cálculo de derivadas de um polinómio, cuja demonstração fica como exercício:

Lema 3.7.1. *Se p é um polinómio de grau $\leq n$ então p é de classe C^∞, e todas as suas derivadas acima de n são nulas. Temos ainda para $k \leq n$ que*

(a) Se $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *então* $p^{(k)}(0) = k! a_k$*, e mais geralmente,*

(b) Se $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ *então* $p^{(k)}(a) = k! a_k$.

Exemplos 3.7.2.

(1) Se $p(x) = 5 + 2x - 3x^2 - 10x^3 + 6x^4$, então

$$p(0) = 5, p'(0) = 2, p''(0) = -\frac{3}{2}, p^{(3)}(0) = -\frac{10}{3!} = -\frac{5}{3}, p^{(4)}(0) = \frac{6}{4!} = \frac{1}{4}$$

$$\text{e } p^{(k)}(x) = 0, \text{ para qualquer } k > 4 \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

(2) Consideramos a função exponencial, dada por $f(x) = e^x$, e tomamos $a = 0$. Temos neste caso que $f^{(n)}(x) = e^x$ e $f^{(n)}(0) = 1$ para qualquer n. Segue-se que

- A recta tangente ao gráfico em $a = 0$ tem equação $y = 1 + x$, e é o gráfico do polinómio $p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$.
- O polinómio $p_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ coincide com f no ponto $x = 0$ até à derivada de ordem 2.

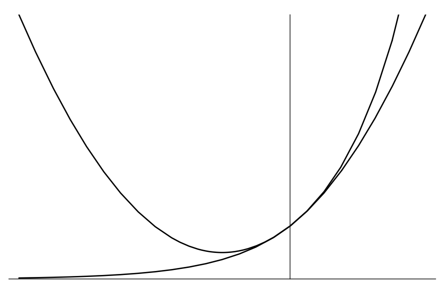


Figura 3.8: Aproximação de $f(x) = e^x$ por $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

- O polinómio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}.$$

coincide com f no ponto $x = 0$ até à derivada de ordem n.

(3) Consideramos a função logaritmo, dada por $f(x) = \log x$, e tomamos $a = 1$. É fácil verificar que neste caso e para $n > 0$ temos

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n} \text{ e } f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Segue-se que

- A recta tangente ao gráfico em $a = 1$ tem equação $y = x - 1$, e é o gráfico do polinómio $p_1(x) = f(0) + f'(0)(x-1) = x - 1$.
- O polinómio

$$p_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{1}{2}(x-1)(3-x)$$

coincide com f no ponto $x = 1$ até à derivada de ordem 2.

- O polinómio

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

coincide com f no ponto $x = 1$ até à derivada de ordem n.

Os exemplos acima tornam evidente a seguinte observação: se num dado ponto a a função f tem derivadas pelo menos até à ordem n, com os valores $f^{(0)}(a), f^{(1)}(a), \cdots, f^{(n)}(a)$, então existe exactamente um polinómio p_n, cujo grau não excede n, e que coincide com f e as suas derivadas até à ordem n no ponto a. É esse que se diz o

Definição 3.7.3 (Polinómio de Taylor)**.** Se a função f está definida numa vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ e tem derivadas em a pelo menos até à ordem n então o polinómio dado por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

diz-se o POLINÓMIO DE TAYLOR de f de ordem n em a.

Note-se de passagem que existem alguns processos elementares indirectos para obter polinómios de Taylor.

Teorema 3.7.4. *Seja f uma função com derivadas até à ordem n numa vizinhança de $x = a$ e g a função definida numa vizinhança de 0 por $g(x) = f(a + x)$, donde $f(x) = g(x - a)$. Se p e q são os polinómios de Taylor de ordem n de f em a e de g em 0, ou seja, se*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ e } q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

temos então que $p(x) = q(x - a)$ e $q(x) = p(a + x)$. Temos igualmente que se $n > 0$ então a derivada p' é o polinómio de Taylor de ordem $n - 1$ de f' em $x = a$.

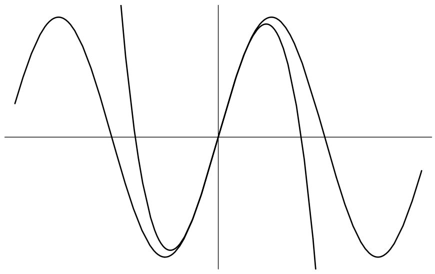


Figura 3.9: Aproximação do $f(x) = \operatorname{sen} x$ por $p(x) = x - \frac{x^3}{3!}$.

Exemplos 3.7.5.

(1) Tomamos $f(x) = \log x$ e $a = 1$, donde $g(x) = \log(1 + x)$. O polinómio de Taylor de ordem n da função f em 1 é, como vimos,

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k},$$

pelo que o polinómio de Taylor de g em 0 é

$$q(x) = p(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

(2) Tomamos $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $a = 0$. As funções $f^{(k)}$ são, sucessivamente, $\operatorname{sen} x, \cos x, -\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} x, \cdots$, repetindo-se esta sequência indefinidamente. Os valores $f^{(k)}(0)$ formam a sucessão 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, $\cdots$, e em particular são nulos quando k é par. Por exemplo, o polinómio de Taylor da função sen de ordem 5 (que é também de ordem 6) é dado por

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Mais geralmente, o polinómio de Taylor $p_{2n+1} = p_{2n+2}$ é dado por

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Diferenciando este polinómio, obtemos o polinómio de Taylor da função cos de ordem $2n$, idêntico ao de ordem $2n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!}$$

Resta-nos naturalmente esclarecer a questão do ERRO da aproximação de uma dada função pelo seu polinómio de Taylor, ou seja, a questão de estimar a diferença:

$$|f(x) - p_n(x)| = |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n|.$$

Veremos imediatamente a seguir como podemos obter estimativas usando o teorema de Cauchy.

Teorema 3.7.6. *Suponha-se que f tem derivadas pelo menos até à ordem n num intervalo aberto I e $a \in I$. Se $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$ e $x \in I$ então existe $\theta \in I$, tal que $|\theta - a| < |x - a|$,*

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!} \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Demonstração. Supomos sem efectiva perda de generalidade que $a = 0$. Apenas esboçamos a demonstração,que deve ser feita por indução, para mostrar que existem $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \in I$, tais que $|\theta_k| < |x|$, e

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(0)}(x)}{x^n} = \frac{f^{(1)}(\theta_1)}{n\theta_1^{n-1}} = \frac{f^{(2)}(\theta_2)}{n(n-1)\theta_2^{n-2}} = \cdots = \frac{f^{(n-1)}(\theta_{n-1})}{n!\theta_{n-1}} = \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}.$$

Note-se que em cada passo acima fazemos uma aplicação directa do Teorema de Cauchy (3.4.7). Observe-se também que

$$\frac{f^{(n-1)}(\theta_{n-1})}{n!\theta_{n-1}} = \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!} \to \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

□

A identidade apresentada no próximo teorema diz-se a FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE, e pode com frequência ser utilizada para estimar a diferença entre uma dada função e o correspondente polinómio de Taylor. O chamado *resto de Lagrange* é exactamente o termo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = f(x) - p_n(x).$$

Teorema 3.7.7 (Teorema de Taylor)**.** *Suponha-se que f tem derivadas pelo menos até à ordem $n+1$ num intervalo aberto I e $a \in I$. Se $x \in I$ então existe $\theta \in I$, tal que $|\theta - a| < |x - a|$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demonstração. Supomos mais uma vez que $a = 0$, e p_n é o polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto 0. Definimos a função auxiliar g por $g(x) = f(x) - p_n(x)$, e notamos que a função g satisfaz as condições do teorema 3.7.6. Observamos ainda que $g^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, porque $p_n^{(n+1)} = 0$. Temos então que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

□

Exemplos 3.7.8.

(1) Para calcular $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x > 0$, observamos que existe $\theta \in]0, x[$ tal que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{f^{(2n+3)}(\theta)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

Temos $|f^{(2n+3)}(\theta)| = |\cos\theta| \leq 1$ e $0 < x < 1$, pelo que o erro da aproximação é

$$E = \frac{f^{(2n+3)}(\theta)}{(2n+3)!}x^{2n+3} \text{ donde } |E| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Por exemplo, com $n = 2$ e $x \leq 1$ temos $f^{(7)}(x) = -\cos(x)$ e

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + E, \text{ onde } 0 > E > -\frac{1}{5040} > -0,0002$$

Com $x = 0,5$, que é um ângulo de quase 29°, e ainda $n = 2$, o erro é bastante menor, e temos

$$\operatorname{sen}(0,5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(6)(8)} + \frac{1}{(120)(32)} + E, \text{ onde}$$

$$0 > E > -\frac{1}{(5040)(128)} > -0,0000016$$

Podemos assim concluir que

$$0,4794254 < \operatorname{sen}(0,5) < 0,4794271$$

(2) Para calcular $g(x) = e^x$ para $x > 0$, observamos que existe $\theta \in]0, x[$ tal que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

A derivada $f^{(n+1)}$ é sempre a própria função exponencial, pelo que o erro $E = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$ satisfaz

$$0 < E = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Com $x = 1$ e para estimar o número de Euler e, notamos que $2 < e < 3$, e tomamos $n = 7$:

$$e = 2,5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + E, \text{ onde}$$

$$0 < E < \frac{3}{40320} < 0,000075$$

Podemos assim concluir que

$$2,71825 < e < 2,71833$$

O último exemplo acima pode ser facilmente complementado com um teorema muito interessante sobre a natureza do número de Euler:

Teorema 3.7.9. *O número de Euler é irracional.*

Demonstração. Conforme acabámos de verificar,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + E, \text{ onde } 0 < E < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Em particular,

$$0 < e - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Suponhamos então, por absurdo, que e é racional, ou seja, $e = k/m$, onde $k, m \in \mathbb{N}$. Escolha-se um natural $n \geq m$ e maior do que 3. Multiplicando as desigualdades acima por $n!$, e como $n \geq 3$, obtemos:

$$0 < \frac{n!k}{m} - \left(2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right) < \frac{3n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} < 1.$$

Observe-se agora que, como $n \geq m$, é claro que $n!$ é múltiplo de m, e portanto $\frac{n!k}{m}$ é um número *natural*. Pela mesma razão,

$$\frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + \frac{n!}{n!} \text{ é um número natural, e portanto}$$

$$N = \frac{n!k}{m} - \left(2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right) < \frac{3n!}{(n+1)!} \text{ é também natural.}$$

Vimos no entanto acima que $0 < N < \frac{3}{4}$, e não existem números naturais entre 0 e 1. Concluímos que N não pode ser natural, ou seja, o número de Euler é irracional. □

O teorema de Taylor pode também ser usado para classificar pontos críticos de funções quando *alguma* derivada de ordem superior à primeira não se anula no ponto crítico em causa.

Teorema 3.7.10. *Suponha-se que f tem derivadas pelo menos até à ordem n num intervalo aberto I e $a \in I$. Se $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$ então*

(a) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então f tem um máximo local em $x = a$;

(b) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = a$;

(c) Se n é ímpar então f não tem nem um máximo local nem um mínimo local em $x = a$.

Demonstração. Na verdade, este resultado é um corolário directo de 3.7.6, aplicado à função g dada por $g(x) = f(x) - f(a)$. Temos então

$$g(x) = f(x) - f(a) = \frac{g^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n, \text{ onde } |\theta - a| < |x-a|$$

Como $\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!} \to f^{(n)}(a) \neq 0$, é claro que

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} \text{ tem o mesmo sinal que } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

O resultado da proposição é uma consequência imediata deste facto. □

Exemplos 3.7.11.

(1) Consideramos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)^3 \log x$. Em $x = 1$ as derivadas desta função são:

$$f^{(1)}(x) = \frac{(x-1)^3}{x} + 3(x-1)^2 \log x \qquad f'(1) = 0$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{(x-1)^3}{x^2} + 6\frac{(x-1)^2}{x} + 6(x-1)\log x \qquad f''(1) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = 2\frac{(x-1)^3}{x^3} - 9\frac{(x-1)^2}{x^2} + 18\frac{x-1}{x} + 6\log x \qquad f'''(1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -6\frac{(x-1)^3}{x^4} + 24\frac{(x-1)^2}{x^3} - 36\frac{x-1}{x^2} + \frac{24}{x} \qquad f^{(4)}(1) = 24$$

Concluímos que f possui um mínimo local em $x = 1$.

(2) Não se deve concluir dos resultados anteriores que os polinómios de Taylor podem sempre ser utilizados para aproximar uma dada função, mesmo supondo que f é de classe C^∞. Por exemplo, a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

possui derivadas de todas as ordens. Em $x = 0$, *todas* as derivadas de f são nulas, pelo que o polinómio de Taylor de f na origem é nulo, qualquer que seja a sua ordem, e não é por isso uma aproximação razoável da função. Note-se igualmente que a função tem um mínimo absoluto em $x = 0$, mas que esse facto não pode ser detectado com recurso ao teorema anterior.

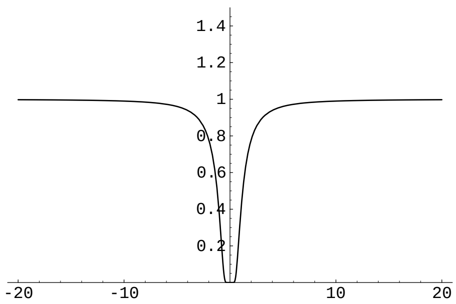


Figura 3.10: Gráfico de $f(x) = e^{-1/x^2}$.

O próximo teorema permite calcular polinómios de Taylor sem recorrer directamente à definição 3.7.3.

Teorema 3.7.12. *Suponha-se que f tem derivadas pelo menos até à ordem n num intervalo aberto I e $a \in I$. Se existe um polinómio p de grau $\leq n$, uma função ϕ definida em I tal que $\phi(x) \to b$ quando $x \to a$, e temos $f(x) = p(x) + \phi(x)(x-a)^{n+1}$ para $x \in I$, então p é o polinómio de Taylor de f de ordem n em a.*

Demonstração. Temos a provar que $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ para $0 \leq k \leq n$, ou seja,

$$g(x) = f(x) - p(x) = \phi(x)(x-a)^{n+1} \Longrightarrow g^{(k)}(a) = 0 \text{ para } 0 \leq k \leq n.$$

Usamos mais uma vez o teorema 3.7.6 aplicado à função g, e procedemos por indução a partir de $k = 0$ até $k = n$.

- É óbvio que $g^{(0)}(a) = g(a) = 0$.

- Supomos que $k \leq n$ e $g^{(0)}(a) = g^{(1)}(a) = \cdots = g^{(k-1)}(a) = 0$. Pelo teorema 3.7.6 temos então que

$$\frac{g(x)}{(x-a)^k} =\!\!\longrightarrow 0$$

Por outro lado, é claro que

$$\frac{g(x)}{(x-a)^k} = \phi(x)(x-a)^{n-k+1} \to 0 \text{ donde } \frac{g^{(k-1)}(a)}{k!} = 0$$

□

Exemplos 3.7.13.

(1) A fórmula clássica para a soma dos termos de uma progressão geométrica permite-nos obter facilmente um polinómio de Taylor muito útil

$$\text{Como } 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ temos}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Concluímos do teorema anterior com $f(x) = \frac{1}{1-x} = \phi(x)$ que o polinómio de Taylor de ordem n da função f em 0 é

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

(2) Substituindo x por $-x$ no exemplo (1) obtemos

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \quad \text{e}$$

o polinómio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \frac{1}{1+x}$ em 0 é

$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n.$$

(3) Substituindo x por x^2 no exemplo (1) obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} \quad \text{e}$$

o polinómio de Taylor de ordem $2n+1$ da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ em 0 é

$$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n}.$$

(4) Como a função $g(x) = \log(1+x)$ satisfaz $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, a derivada de qualquer polinómio de Taylor de g não constante é um polinómio de Taylor do exemplo (2). Repare-se que

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

é um polinómio de Taylor de f.

(5) Como a função $h(x) = \arctan x$ satisfaz $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, a derivada de qualquer polinómio de Taylor de h não constante é um polinómio de Taylor do exemplo (3). Observe-se por isso que

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

é um polinómio de Taylor de h.

Capítulo 4

Integrais

4.1 Introdução

A noção de *integral* de funções reais de variável real está directamente relacionada com a noção de *área* de figuras planas. No caso mais simples, que é o de uma função $f \geq 0$ no intervalo I de extremos $a \leq b$, o integral de f no intervalo I é exactamente a *área da região de ordenadas* de f no mesmo intervalo, i.e., é a área do conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, 0 < y < f(x)\}$. No caso mais geral, que é o de uma função que muda de sinal no intervalo

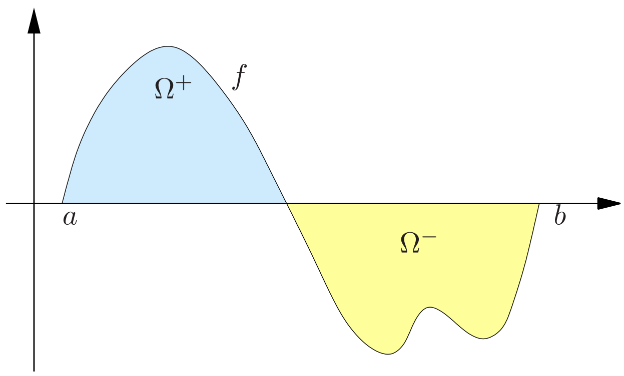


Figura 4.1: $\int_a^b f(x)dx = \text{Área}(\Omega^+) - \text{Área}(\Omega^-)$

I em causa, a respectiva região de ordenadas é o conjunto $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, onde $\Omega^+ = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } 0 < y < f(x)\big\}$ está *acima* do eixo dos xx e $\Omega^- = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } 0 > y > f(x)\big\}$ está *abaixo* do mesmo eixo. O INTEGRAL de f, designado usualmente por

$$\int_a^b f(x)dx, \int_a^b f, \int_I f(x)dx \text{ ou } \int_I f,$$

e é a DIFERENÇA DAS ÁREAS dos conjuntos Ω^+ e Ω^-. Dizemos anda que f é a função *integranda*, e o intervalo I é a *região de integração*.

Antes mesmo de definirmos mais rigorosamente a noção de integral, apresentamos alguns exemplos elementares, antecipando o resultado do cálculo de diversos integrais, e ilustrando a sua aplicação também à determinação de grandezas físicas que normalmente não imaginamos como "áreas".

Exemplos 4.1.1.

(1) Se f é constante e igual a c no intervalo $[a, b]$, então a sua região de ordenadas é um rectângulo de base $b-a$ e altura $|c|$, e portanto temos

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

O sinal algébrico deste integral é o sinal de c, de acordo com a convenção ilustrada na figura 4.1.

(2) Se $f(x) = x$ e $I = [0, 1]$ então a região de ordenadas de f em I é um *triângulo* de base e altura 1, com área 1/2. Concluímos que

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

(3) Se $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ para $-r \leq x \leq r$ então a região de ordenadas de f é um *semi-círculo* de raio r, e devemos ter

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

(4) Em geral, se o gráfico de f é uma recta, i.e., se $f(x) = mx+p$, então a sua região de ordenadas é um *trapézio*, e a sua área pode ser calculada multiplicando a sua *largura*, que é $b-a$, pela sua *altura média*, que é

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{(ma+p)+(mb+p)}{2} = m\frac{a+b}{2} + p.$$

Concluímos que

$$\int_a^b (mx+p)dx = [m\frac{a+b}{2} + p](b-a) = \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + p(b-a).$$

É simples verificar que a identidade acima continua válida, mesmo que a função f mude de sinal na região de integração, apesar do resultado deixar de representar directamente uma área. Em qualquer caso, é sempre possível interpretar este resultado de múltiplas maneiras:

- Se f representa a *velocidade* (em função do *tempo*) de um ponto material em movimento rectilíneo, é natural usar v em lugar de f, e representar a variável independente por t. Neste caso, $m = \frac{dv}{dt} = a$ é a *aceleração*, e $p = v(0) = v_0$ é a *velocidade inicial*. Temos então $v(t) = at + v_0$, e o movimento é *uniformemente acelerado*. A fórmula acima, escrita com $a = t_1$ e $b = t_2$, dá o *deslocamento*[1] do ponto em causa no intervalo $[t_1, t_2]$, que é:

$$\int_{t_1}^{t_2} (at + v_0)dt = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1).$$

  O caso particular em que $a = g$, $t_1 = v_0 = 0$ e $t_2 = t$, dá para o deslocamento o valor de $\frac{1}{2}gt^2$, que é a famosa fórmula da "queda dos graves" descoberta por Galileu.

- Para uma outra possível interpretação do mesmo resultado, imagine-se uma mola, com comprimento "natural" x_0, colocada segundo o eixo dos xx, com uma extremidade fixa na origem $x = 0$. A *força* f com que a mola resiste à sua deformação é dada em primeira aproximação por $f(x) = -k(x - x_0)$, onde $k > 0$ é a *constante de Hooke*, que depende do material que constitui a mola, e da sua forma, e x é a posição da extremidade livre da mola. Se a mola for deformada lentamente do comprimento x_0 para x_1 então o *trabalho* exigido por essa deformação é

$$-\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} k(x - x_0)dx =$$

$$\frac{k}{2}(x_1^2 - x_0^2) - kx_0(x_1 - x_0) = \frac{k}{2}(x_1 - x_0)^2$$

  A função $U(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$ é a *energia (potencial) elástica* armazenada na mola, quando o seu comprimento é x.

É certamente possível basear a teoria da integração de funções reais de variável real no prévio desenvolvimento de uma teoria da *área* de subconjuntos do plano. É no entanto mais apropriado a um curso introdutório como este, e mais expedito, definir directamente o *integral*, e usá-lo, por sua vez, para definir e calcular a área de uma grande variedade de figuras planas, como faremos ainda neste Capítulo. Mostraremos aliás que as ideias aqui desenvolvidas nos permitem calcular também *volumes*, e *comprimentos*, para diversos tipos de conjuntos, mas sem nunca nos preocuparmos com a formalização de teorias mais gerais e mais rigorosas sobre as noções de "área", "volume", ou "comprimento".

[1] O *deslocamento* é a distância que separa a posição final da posição inicial, afectada por um sinal algébrico negativo, se a posição final está à esquerda da posição inicial.

4.2 O Integral de Riemann

A definição de integral que utilizaremos recorre a uma ideia já conhecida na Antiguidade Clássica, e normalmente atribuída a Arquimedes[2], que a usou para calcular grandezas geométricas como áreas, volumes, e centros de massa. Esta ideia resume-se a *aproximar* as regiões em causa por outras mais simples, para as quais o mesmo cálculo é imediato. A figura seguinte exibe uma aproximação elementar do número π, obtida por este processo.

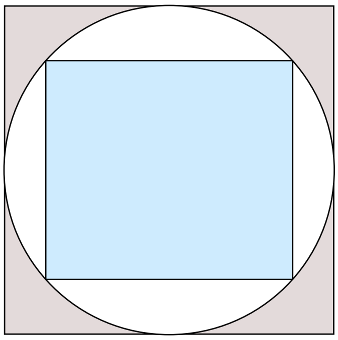


Figura 4.2: $2 < \pi < 4$

O próximo exemplo repete um cálculo feito pelo próprio Arquimedes, o da área da região Ω limitada por um *arco de parábola*, e por segmentos de recta paralelos ao seu eixo, e directriz. Mostra em particular como se pode determinar o valor *exacto* de uma área, a partir de aproximações que, tomadas individualmente, envolvem sempre erros que nunca são nulos.

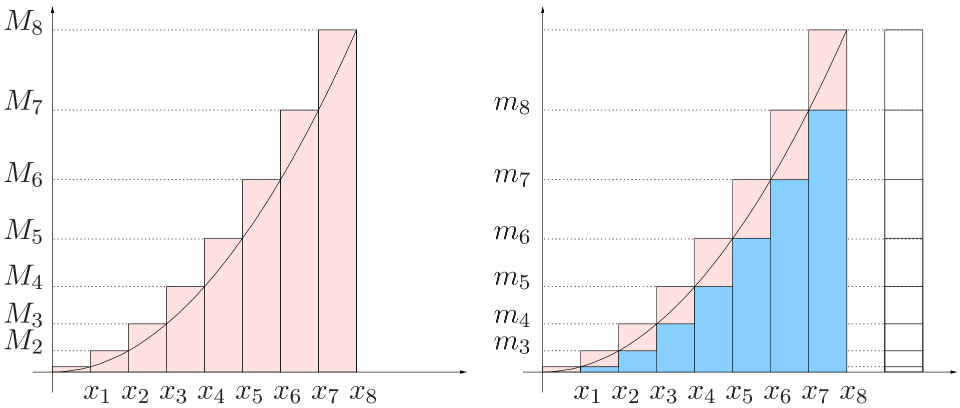


Figura 4.3: Aproximações da região Ω por rectângulos.

[2]Arquimedes, matemático e engenheiro, foi um dos maiores cientistas da História. Viveu em Siracusa, no século III AC.

Exemplo 4.2.1. Consideramos a função dada por $f(x) = x^2$, no intervalo $[0, 1]$, e a respectiva região de ordenadas $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 < y < x^2\}$. É evidente que $0 \leq x^2 \leq 1$ quando $0 \leq x \leq 1$, i.e., a região Ω está contida num quadrado de lado 1, e por isso devemos ter:

$$0 \leq \int_0^1 x^2 dx = \text{Área}(\Omega) \leq 1.$$

Esta é, bem entendido, uma aproximação grosseira([3]) da área de Ω, mas é fácil melhorá-la, *dividindo* o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos, e repetindo a mesma técnica de aproximação, mas separadamente em cada subintervalo. Neste caso, é particularmente conveniente utilizar n subintervalos com o mesmo comprimento $1/n$. A figura 4.3 ilustra a aproximação em causa, quando $n = 8$. Os pontos de subdivisão são em geral:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_k = \frac{k}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

Como a função f é *crescente* no intervalo $[0, 1]$, é claro que

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k), \text{ i.e., } x_{k-1}^2 \leq x^2 \leq x_k^2, \text{ quando } x_{k-1} \leq x \leq x_k.$$

Designando por $\Omega_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_{k-1}, x_k], 0 < y < x^2\}$ a região de ordenadas de f no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, observamos que Ω_k:

- Está *contida* num rectângulo com

$$\text{base } x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}, \text{ altura } x_k^2 = \frac{k^2}{n^2} = M_k, \text{ e área } \frac{k^2}{n^3}, \text{ e}$$

- *Contém* um rectângulo com a mesma base, mas

$$\text{altura } x_{k-1}^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2} = m_k = M_{k-1}, \text{ e área } \frac{(k-1)^2}{n^3}.$$

Por esta razão,

$$\frac{(k-1)^2}{n^3} \leq \text{Área}(\Omega_k) \leq \frac{k^2}{n^3}.$$

A área de Ω é a soma das áreas das regiões Ω_k, pelo que obtemos ainda as desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \text{Área}(\Omega_k) = \text{Área}(\Omega) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}.$$

Vimos no Capítulo 1 que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ donde } \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

[3] É claro que Ω está contido num triângulo de base e altura 1, donde $\text{Área}(\Omega) \leq 1/2$.

Temos então que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}, \text{ e } \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

A área da região Ω satisfaz, por isso, as desigualdades:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\leq \text{Área}(\Omega)\leq \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

Como n é um natural arbitrário, podemos passar ao limite quando $n\to\infty$, obtendo finalmente:

$$\text{Área}(\Omega)=\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2dx.$$

O exemplo anterior não passa de um caso individual, e serve apenas para definir e calcular uma área (e um integral) muito especiais. No entanto, ilustra bem as ideias que suportam a definição do chamado *integral de Riemann*, que estudaremos neste Capítulo.

Considere-se agora uma qualquer função f, definida pelo menos num intervalo limitado I, de extremos $a\leq b$. Supomos apenas que f é *limitada* no intervalo I. Em particular, f pode não ser contínua e/ou monótona em I. Como vimos no exemplo 4.2.1, é útil dividir o intervalo de integração I em subintervalos disjuntos não-vazios $I_1, I_2, \cdots, I_n$. É comum numerarmos os intervalos I_k "da esquerda para a direita", i.e., de tal forma que I_k tem extremos $x_{k-1}\leq x_k$, onde

$$1\leq k\leq n, a=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n=b.$$

Dizemos neste caso que o conjunto $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ é uma PARTIÇÃO (finita) de I. O COMPRIMENTO do intervalo I_k é $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, e a soma $\sum_{k=1}^n \Delta x_k=b-a$ é o comprimento do intervalo original I. Note-se que os subintervalos I_k podem ter comprimentos distintos. Ocasionalmente é útil designar o comprimento do intervalo J por $c(J)$. Por exemplo,

$$c(I_k)=\Delta x_k, \text{ e } c(I)=b-a.$$

Sendo f limitada em I, é claro que f é igualmente limitada em cada um dos subintervalos I_k, e definimos:

$$m_k=\inf\{f(x):x\in I_k\}, \text{ e } M_k=\sup\{f(x):x\in I_k\}$$

É fundamental entender aqui que qualquer definição "razoável" da noção de integral deve satisfazer as seguintes desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k\leq\int_a^b f(x)dx\leq\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

Por outras palavras, as somas

$$\overline{S}(f,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \text{ e } \underline{S}(f,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

são *aproximações* do integral de f, sendo que

- $\overline{S}(f,\mathcal{P})$ é uma aproximação *por excesso* de $\int_a^b f(x)dx$, e
- $\underline{S}(f,\mathcal{P})$ é uma aproximação *por defeito* de $\int_a^b f(x)dx$.

$\overline{S}(f,\mathcal{P})$ e $\underline{S}(f,\mathcal{P})$ dizem-se, respectivamente, a SOMA SUPERIOR e a SOMA INFERIOR de Darboux, da função f, relativas à partição $\mathcal{P}$.

Exemplos 4.2.2.

(1) Se f é constante em I, i.e., se $f(x)=c$ para qualquer $x\in I$, então é claro que $m_k=M_k=c$ para qualquer k, e temos:

$$\overline{S}(f,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k=\underline{S}(f,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k=c(b-a)$$

A igualdade $\overline{S}(f,\mathcal{P})=\underline{S}(f,\mathcal{P})$ sugere que, neste caso, a aproximação que referimos é exacta, o que aliás é geometricamente óbvio.

(2) Seja $f(x)=x$ e $I=[0,1]$, e considere-se a partição $\mathcal{P}_n$ formada pelos $n+1$ pontos igualmente espaçados $0=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n=1$, donde $\Delta x_k=\frac{1}{n}$ e $x_k=\frac{k}{n}$. Como f é crescente e contínua, é claro que $m_k=f(x_{k-1})=x_{k-1}$, e $M_k=f(x_k)=x_k$. Temos portanto

$$\overline{S}(f,\mathcal{P})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} \text{ e } \underline{S}(f,\mathcal{P})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}.$$

Recorrendo à usual fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, obtemos $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, e portanto estas somas de Darboux são dadas por

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}_n)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) \text{ e } \overline{S}(f,\mathcal{P}_n)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

Repare-se que neste caso temos

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}_n)<\frac{1}{2}<\overline{S}(f,\mathcal{P}_n) \text{ e } \overline{S}(f,\mathcal{P}_n)-\underline{S}(f,\mathcal{P}_n)=\frac{1}{n}\to 0.$$

Note-se que por isso $\frac{1}{2}$ é o ÚNICO número real α que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}_n)\leq\alpha\leq\overline{S}(f,\mathcal{P}_n)$$

o que concorda naturalmente com o usual resultado elementar sobre a área do triângulo que neste caso é a região de ordenadas da função f. Na notação da teoria da integração, escrevemos

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

(3) Seja $g(x) = x^2$ e $I = [0, 1]$. Tomamos novamente a partição $\mathcal{P}_n$ referida no exemplo anterior, formada pelos pontos $x_k = \frac{k}{n}$. Já vimos que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{3n+1}{6n^2} \text{ e}$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{3n-1}{6n^2}.$$

Temos neste caso que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}_n) < \frac{1}{3} < \overline{S}(f, \mathcal{P}_n) \text{ e } \overline{S}(f, \mathcal{P}_n) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Deve ser claro que, tal como Arquimedes observou, $\frac{1}{3}$ é o ÚNICO número real α que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}_n) \leq \alpha \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_n)$$

e devemos ter por isso

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(4) Não se deve concluir dos exemplos acima que as somas superiores e inferiores de uma dada função se aproximam *sempre*, à medida que utilizamos partições "mais finas", i.e., com mais pontos de subdivisão. Para ilustrar esta observação, consideramos a função dir, no intervalo $I = [0, 1]$, e supomos que $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ é uma *qualquer* partição de I com $n + 1$ pontos. Como o intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ tem mais do que um ponto, temos $m_k = \min\{\text{dir}(x) : x \in I_k\} = 0$, porque I_k contém irracionais, e $M_k = \max\{\text{dir}(x) : x \in I_k\} = 1$, porque I_k também contém racionais. Segue-se que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1, \text{ e } \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0.$$

Por palavras, *todas* as somas superiores de Darboux da função de Dirichlet no intervalo I são iguais a 1, e *todas* as somas inferiores são nulas, *independentemente* da partição usada no seu cálculo. Neste caso, portanto, as ideias de Arquimedes não nos ajudam a determinar um valor para o integral da função de Dirichlet, que no contexto da teoria aqui desenvolvida *não tem integral*, ou seja, *não é integrável*.

A definição original de Riemann é equivalente à seguinte:

Definição 4.2.3 (Função Integrável)**.** Se f está definida e é limitada no intervalo $I = [a, b]$, dizemos que f é INTEGRÁVEL no intervalo I se e só se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe *alguma* partição $\mathcal{P}$ do intervalo I tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Caso contrário, dizemos que f NÃO É INTEGRÁVEL em I.

Exemplo 4.2.4. Nos termos da definição anterior, os resultados referidos nos exemplos 4.2.2 podem ser resumidos como se segue:

- Qualquer função *constante* é *integrável* em $I = [a, b]$,
- As funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ são *integráveis* em $I = [0, 1]$,
- A função de Dirichlet *não é integrável* em $I = [0, 1]$, e na realidade não é integrável em nenhum intervalo com mais do que um ponto.

Os exemplos anteriores também sugerem que se f é uma função integrável num dado intervalo $I = [a, b]$ então o *integral* de f é o *único* número real α que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \alpha \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}), \text{ para qualquer partição } \mathcal{P} \text{ do intervalo } I.$$

Para verificar que existe efectivamente *algum* número que satisfaz as desigualdades acima, necessitamos de introduzir algumas ideias e resultados auxiliares.

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são partições do mesmo intervalo I, dizemos que $\mathcal{P}'$ é MAIS FINA DO QUE $\mathcal{P}$, ou é um REFINAMENTO de $\mathcal{P}$, se e só se $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$. Deve ser óbvio que neste caso $\mathcal{P}'$ conduz a uma *subdivisão* dos intervalos determinados por $\mathcal{P}$. O próximo resultado compara somas superiores e inferiores correspondentes a partições distintas. Note-se que é válida para qualquer função *limitada*, independentemente de hipóteses sobre a sua integrabilidade.

Proposição 4.2.5. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado de extremos $a \leq b$, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função tal que $m \leq f(x) \leq M$ para $x \in I$. Sejam ainda $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ partições de I. Temos então:*

a) $m(b - a) \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq M(b - a)$.

b) Se $\mathcal{P}'$ é mais fina do que $\mathcal{P}$, $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$.

c) Em qualquer caso, $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}')$.

Demonstração.

a) Observamos que, como $m \leq m_k \leq M_k \leq M$, é claro que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M \Delta x_k = M(b-a) \text{ e}$$

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{n} m \Delta x_k = m(b-a)$$

b) Demonstramos apenas a desigualdade relativa às somas superiores, porque a verificação para as somas inferiores é análoga. Supomos que $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e designamos por M_k o supremo de f no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Escrevemos ainda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Supomos ainda que $\mathcal{P}'$ tem precisamente mais um ponto do que $\mathcal{P}$, porque o caso geral é claramente uma consequência deste. Designamos o ponto adicional por z, e notamos que existe i tal que $x_{i-1} < z < x_i$. Designamos por $M_{i,1}$ o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, z]$ e por $M_{i,2}$ o supremo de f em $[z, x_i$. Deve ser evidente que $M_{i,1} \leq M_i$ e $M_{i,2} \leq M_i$, e em particular

$$M_{i,1}(z - x_{i-1}) + M_{i,2}(x_i - z) \leq M_i(z - x_{i-1}) + M_i(x_i - z) = M_i \Delta x_i$$

Um momento de reflexão mostra assim que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \overline{S}(f,\mathcal{P}') = M_i \Delta x_i - M_{i,1}(z - x_{i-1}) - M_{i,2}(x_i - z) \geq 0$$

c) Consideramos a partição $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ e aplicamos a afirmação anterior, para obter

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}'') \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}'') \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}')$$

□

Dada uma função f limitada num intervalo I, é conveniente considerar *todas* as suas somas de Darboux em I, agrupando-as de acordo com a sua natureza. Designamos por $\overline{\Sigma}(f,I)$ o conjunto de *todas as somas superiores* da função f no intervalo I, e por $\underline{\Sigma}(f,I)$ o conjunto das respectivas *somas inferiores*. Claro que estes conjuntos não são vazios, e a proposição 4.2.5 mostra que

$$s \in \underline{\Sigma}(f,I) \text{ e } S \in \overline{\Sigma}(f,I) \Longrightarrow s \leq S$$

Em particular, as somas superiores são *majorantes* do conjunto $\underline{\Sigma}(f,I)$ das somas inferiores. Concluímos do axioma do supremo que o conjunto $\underline{\Sigma}(f,I)$ tem SUPREMO α, e temos

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \alpha, \text{ para qualquer partição } \mathcal{P}.$$

Como o supremo do conjunto $\underline{\Sigma}(f,I)$ é o menor dos seus majorantes, e qualquer soma superior é majorante de $\underline{\Sigma}(f,I)$, concluímos igualmente que

$$\alpha \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}), \text{ para qualquer partição } \mathcal{P}.$$

Dito doutra forma, existe pelo menos um número real α que "separa" as somas inferiores das somas superiores, ou seja, tal que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \alpha \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}), \text{ para qualquer partição } \mathcal{P}.$$

Esta desigualdade mostra igualmente que α é *minorante* do conjunto $\overline{\Sigma}(f,I)$. Se β é o ÍNFIMO de $\overline{\Sigma}(f,I)$, podemos agora concluir que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \alpha \leq \beta \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}), \text{ para qualquer partição } \mathcal{P}.$$

Referimo-nos aos números α e β como se segue

Definição 4.2.6 (Integral Superior e Integral Inferior)**.** Se f é uma função limitada no intervalo limitado $I = [a,b]$ então os respectivos INTEGRAL SUPERIOR $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ e INTEGRAL INFERIOR $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ são dados por

(a) Integral Superior de f em I: $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)dx = \beta = \inf \overline{\Sigma}(f,I).$

(b) Integral Inferior de f em I: $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)dx = \alpha = \sup \underline{\Sigma}(f,I).$

Exemplo 4.2.7. No caso da função de Dirichlet (exemplo (4) em 4.2.2) temos

$$\overline{\int_0^1} \operatorname{dir}(x)dx = 1 \text{ e } \underline{\int_0^1} \operatorname{dir}(x)dx = 0.$$

Podemos facilmente refrasear a definição 4.2.3 em termos destas noções:

Teorema 4.2.8. *Se f é uma função limitada no intervalo $I = [a,b]$ então*

a) f é integrável em I se e só se $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, *e neste caso,*

b) $\displaystyle A = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ *é o* único *real tal que*

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq A \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}), \text{ para qualquer partição } \mathcal{P} \text{ de } I$$

Demonstração. Supomos primeiro que f é integrável e $\epsilon > 0$, e observamos que existe uma partição $\mathcal{P}$ tal que $\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \epsilon$. É então claro que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) \text{ e portanto}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, temos necessariamente $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, e f é integrável em I.

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, e como o integral superior é o ínfimo das somas superiores, existe uma partição $\mathcal{P}'$ tal que

$$(1)\quad \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}') < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon/2$$

Analogamente, e como o integral inferior é o supremo das somas inferiores, existe uma partição $\mathcal{P}''$ tal que

$$(2)\quad \underline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{S}(f,\mathcal{P}'') > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon/2$$

Tomando $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$, segue-se da proposição 4.2.5 que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}'') \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}')$$

Usando agora (1) e (2), e supondo que o integral superior e o integral inferior são ambos iguais a α, temos

$$\alpha - \epsilon/2 < \underline{S}(f,\mathcal{P}'') \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}') < \alpha + \epsilon/2$$

Concluímos que a partição $\mathcal{P}$ satisfaz

$$\alpha - \epsilon/2 < \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \overline{S}(f,\mathcal{P}) < \alpha + \epsilon/2, \text{ donde } \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \epsilon$$

Para verificar a afirmação b), basta notar que se temos para qualquer partição $\mathcal{P}$ de I que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq A \leq \overline{S}(f,\mathcal{P})$$

então A é majorante do conjunto das somas inferiores e minorante do conjunto das somas superiores, pelo que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq A \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

É assim óbvio que se a função é integrável só podemos ter

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = A = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

□

Definição 4.2.9 (Integral de Riemann)**.** Se f é uma função integrável no intervalo limitado $I = [a, b]$ então o seu INTEGRAL no intervalo I, designado $\int_a^b f(x)dx$, é dado por

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Exemplo 4.2.10. Sendo f uma função limitada no intervalo limitado $I = [a, b]$, suponha-se que existem partições $\mathcal{P}_n$ tais que $\overline{S}(f, \mathcal{P}_n) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, que é o caso dos exemplos (1) a (3) em 4.2.2). Temos então

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}_n) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_n)$$

É imediato concluir que f é integrável em I e que tanto $\overline{S}(f, \mathcal{P}_n)$ como $\underline{S}(f, \mathcal{P}_n)$ convergem para $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Podemos finalmente concluir que, agora de acordo com as definições formais já apresentadas, temos

$$\int_a^b cdx = c(b-a), \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

4.3 Funções Integráveis

Pode ser difícil aplicar directamente a definição de integral apresentada na secção anterior para decidir se uma dada função f é efectivamente integrável. Veremos nesta secção alguns "critérios de integrabilidade" de verificação mais simples, e que permitem estabelecer com facilidade a integrabilidade de muitas das funções que encontramos em aplicações da teoria.

Começamos por uma observação muito útil, que generaliza o argumento utilizado a propósito do exemplo de Arquimedes, e que permite apresentar facilmente múltiplos exemplos de funções integráveis. (Ver figura 4.4).

Teorema 4.3.1. *Se f é limitada e monótona no intervalo $I = [a, b]$, então f é Riemann-integrável em I.*

Demonstração. Supomos que f é crescente, ou seja, $f(a) \leq f(b)$ (o caso decrescente é tratado de forma inteiramente análoga). Consideramos a partição $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ formada por n pontos x_k igualmente espaçados, donde:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Como f é crescente, temos $m_k = f(x_{k-1})$ e $M_k = f(x_k)$, e portanto:

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

A soma à direita é evidentemente telescópica, pelo que

$$\overline{S}(f,P_n)-\underline{S}(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$$

É portanto óbvio que $\overline{S}(f,P_n)-\underline{S}(f,P_n)\to 0$, e segue-se, como observámos no exemplo 4.2.10, que a função f é integrável. □

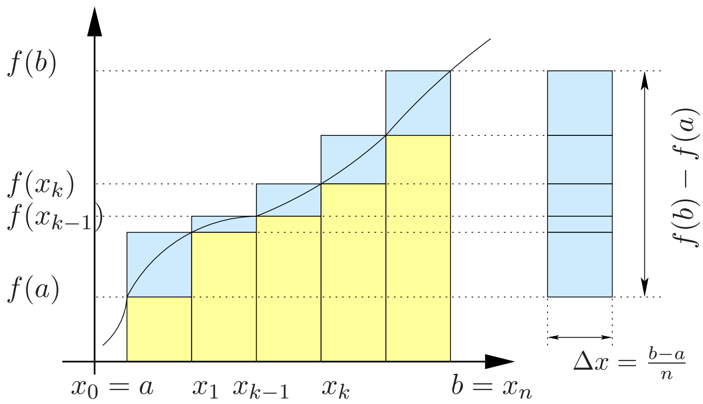


Figura 4.4: Integrabilidade de uma função monótona.

Muitas funções úteis em aplicações do Cálculo são apenas monótonas em *subintervalos* do seu domínio convenientemente escolhidos. Por exemplo, a função coseno não é monótona em $\mathbb{R}$, mas é-o em qualquer intervalo da forma $[n\pi,(n+1)\pi]$. O teorema anterior em combinação com o seguinte permite decidir facilmente pela integrabilidade dessas funções em *qualquer* intervalo.

Teorema 4.3.2 (Aditividade em relação à região de integração)**.** *Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que $a<c<b$ e suponha-se que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Então f é integrável em $[a,b]$ e temos:*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

Demonstração. Seja $\alpha=\int_a^c f$ e $\beta=\int_c^b f$. Dado $\varepsilon>0$, existem partições P_1 de $[a,c]$ e P_2 de $[c,b]$ tais que:

$$\overline{S}(f,P_1)-\underline{S}(f,P_1)<\varepsilon/2 \text{ e } \overline{S}(f,P_2)-\underline{S}(f,P_2)<\varepsilon/2$$

Temos portanto que

$$\alpha-\varepsilon/2<\underline{S}(f,P_1)\le\alpha\le\overline{S}(f,P_1)<\alpha+\varepsilon/2 \text{ e}$$

$$\beta - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, P_2) \le \beta \le \overline{S}(f, P_2) < \beta + \varepsilon/2.$$

É fácil de verificar que $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a, b]$ para a qual

$$\overline{S}(f, P) = \overline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2) < \alpha + \beta + \varepsilon,$$

$$\underline{S}(f, P) = \underline{S}(f, P_1) + \underline{S}(f, P_2) > \alpha + \beta - \varepsilon \text{ e}$$

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2) < \varepsilon.$$

Segue-se que f é integrável no intervalo $[a, b]$, e

$$\alpha + \beta - \varepsilon \le \int_a^b f(x)dx \le \alpha + \beta - \varepsilon$$

Como ε é arbitrário, concluímos que f é integrável em $[a, b]$ e que:

$$\int_a^b f = \alpha + \beta = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$\square$

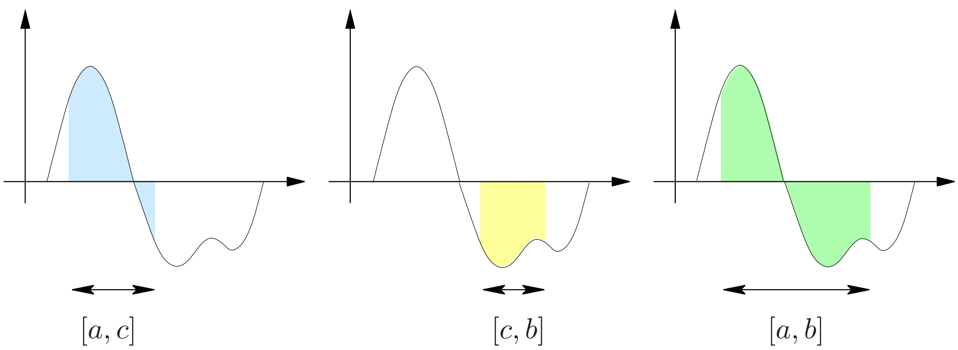


Figura 4.5: Aditividade em relação à região de integração

Nota 4.3.3. É muito conveniente usar o símbolo do integral $\int_a^b f$ mesmo quando $a \ge b$, e para isso introduzimos as seguintes convenções:

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ se } a > b.$$

é fácil verificar que se f é integrável no intervalo I então temos

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

agora para quaisquer $a, b, c \in I$ (i.e., mesmo que $a < c < b$ não se verifique).

O próximo teorema exprime uma das propriedades mais fundamentais do integral. Deve observar-se que é um resultado com uma interpretação geométrica relativamente simples, em especial em b).

Teorema 4.3.4 (Linearidade do integral)**.** *Sejam f, g funções integráveis no intervalo $I = [a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $f + g$ *é integrável em* $[a, b]$ *e* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(b) cf *é integrável em* $[a, b]$ *e* $\displaystyle\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

Demonstração. Para demonstrar (a), seja então $\alpha = \int_a^b f$ e $\beta = \int_a^b g$. Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existem partições P_1 e P_2 de $[a, b]$ tais que:

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, P_1) \leq \alpha \leq \overline{S}(f, P_1) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.1}$$

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(g, P_2) \leq \beta \leq \overline{S}(g, P_2) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Consideramos a partição $P = P_1 \cup P_2$, e um dos seus subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Designando por M_k, M'_k e M''_k os supremos de $f + g$, f e g no intervalo I_k, notamos que

$$x \in I_k \Rightarrow f(x) + g(x) \leq M'_k + M''_k \Rightarrow M_k \leq M'_k + M''_k$$

Podemos agora concluir que

$$\overline{S}(f+g, P) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, P) \leq \overline{S}(f, P_1) + \overline{S}(g, P_2) < \alpha + \beta + \epsilon$$

Temos analogamente que

$$\underline{S}(f+g, P) \geq \underline{S}(f, P) + \underline{S}(g, P) \geq \underline{S}(f, P_1) + \underline{S}(g, P_2) > \alpha + \beta - \epsilon$$

Obtemos finalmente que

$$\alpha + \beta - \epsilon < \underline{S}(f+g, P) \leq \overline{S}(f+g, P) < \alpha + \beta + \epsilon$$

Como ε é arbitrário, isto mostra que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e o seu integral é dado por:

$$\int_a^b (f+g) = \alpha + \beta = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

A demonstração de (b) é bastante mais fácil e fica como exercício (é útil considerar separadamente os casos $c > 0$, $c = 0$ e $c < 0$). $\square$

De um ponto de vista intuitivo, é claro que a área de uma região é uma quantidade positiva, e a área de uma parte dessa região não pode exceder a área da totalidade dessa região. O próximo resultado exprime e formaliza esta propriedade em termos do integral.

Teorema 4.3.5 (Monotonia do integral)**.** *Sejam f, g funções integráveis em $I = [a, b]$.*

(a) Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f \geq 0$.

(b) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(c) Em particular, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo o $x \in [a, b]$ então:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demonstração. A demonstração de (a) fica como exercício. Para demonstrar (b) notamos que $f(x) \leq g(x)$ se e só se $g(x) - f(x) \geq 0$. Assim, aplicando (a) à função $g - f$ e usando a linearidade do integral, obtemos:

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Finalmente, aplicando (b) às funções constantes $g(x) = m$ e $h(x) = M$, obtemos:

$$m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b-a).$$

□

Dada uma função real f é por vezes útil considerar separadamente as suas partes POSITIVA f^+ e NEGATIVA f^-, que são dadas por:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0\,, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } f(x) > 0, \\ -f(x)\,, & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Note-se que f^+ e f^- são as únicas soluções do sistema

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} f^+ = (|f| + f)/2 \\ f^- = (|f| - f)/2 \end{cases}$$

Veremos imediatamente a seguir que as funções f^+, f^- e f são integráveis quando f é integrável, e obteremos ainda a chamada *desigualdade triangular*, que generaliza a usual desigualdade

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

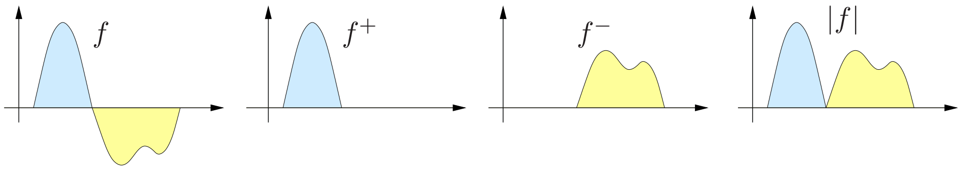


Figura 4.6: As funções f, f^+, f^- e $|f|$.

Teorema 4.3.6 (Módulo e integral)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $|f|$ é uma função integrável em $[a,b]$ e temos:*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja f uma função integrável em $I = [a,b]$ e $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ tal que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Sejam M_k e m_k, respectivamente, o supremo e ínfimo de f no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, e M'_k e m'_k o o supremo e ínfimo de $|f|$ no mesmo subintervalo. Observe-se que

- Se $m_k \ge 0$ então $M'_k = M_k$ e $m'_k = m_k$ donde $M'_k - m'_k = M_k - m_k$.
- Se $M_k \le 0$ então $M'_k = -m_k$ e $m'_k = -M_k$ donde $M'_k - m'_k = M_k - m_k$.
- Se $M_k \ge 0$ e $m_k \le 0$ então $M'_k = \max\{M_k, -m_k\}$ e $m'_k = 0$ donde $M'_k - m'_k \le M_k - m_k$.

Temos assim em todos os casos que $M'_k - m'_k \le M_k - m_k$, e portanto

$$\overline{S}(|f|,\mathcal{P}) - \underline{S}(|f|,\mathcal{P}) \le \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \epsilon,$$

donde $|f|$ é uma função integrável em I. Segue-se do Teorema 4.3.4 que $f^+ = (|f| + f)/2$ e $f^- = (|f| - f)/2$ também são funções integráveis. Recorrendo também ao Teorema 4.3.5, concluímos que:

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f^+ - f^-)\right| = \left|\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-\right| \le$$

$$\le \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|.$$

□

Exemplo 4.3.7. O Teorema 4.3.6 diz-nos que se f é integrável em $[a,b]$ então $|f|$ também é integrável em $[a,b]$, mas o recíproco, em geral, não é verdadeiro. Por exemplo, para a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-1\,, & \text{se } x\in[a,b]\cap\mathbb{Q};\\ 1\,, & \text{se } x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q};\end{cases}$$

temos que $|f|=1$ é uma função constante. Portanto $|f|$ é integrável em $[a,b]$, mas f não é integrável em $[a,b]$.

Estabelecemos em seguida a integrabilidade de funções contínuas em intervalos limitados e fechados.

Teorema 4.3.8. *Se f é contínua no intervalo limitado e* fechado $I=[a,b]$, *então f é integrável em I.*

Demonstração. Dado $\epsilon>0$ e um intervalo $J=[c,d]\subseteq I$, dizemos que J *tem a propriedade-ϵ* se e só existe existe uma partição $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ do intervalo J tal que $M_k-m_k<\epsilon$ para cada um dos correspondentes subintervalos $[x_{k-1},x_k]$. Vamos provar que o intervalo inicial I tem a propriedade-ϵ, para qualquer $\epsilon>0$, argumentando por contradição.

Dado um qualquer intervalo $J=[c,d]$ decomposto em dois subintervalos $J_1=[c,s]$ e $J_2=[s,d]$, é fácil verificar que se J_1 e J_2 têm a propriedade-ϵ então J tem a propriedade-ϵ. Portanto, se o intervalo inicial $I_1=I$ NÃO tem a propriedade-ϵ, m é o ponto médio de I, $J_1=[a,m]$ e $J_2=[m,b]$, então *pelo menos um destes subintervalos* NÃO *tem a propriedade-ϵ*, e designamos esse intervalo que não tem a propriedade-ϵ por I_2.

A observação acima é também aplicável a I_2, pelo que se dividirmos I_2 pelo seu ponto médio, pelo menos um dos subintervalos resultantes não tem a propriedade-ϵ, e designamo-lo por I_3. Este processo de subdivisão prossegue indefinidamente, ou seja, existe uma sucessão de intervalos encaixados $I_1\supset I_2\supset\cdots$ *nenhum dos quais tem a propriedade-ϵ*.

Pelo princípio do encaixe, existe um ponto $\xi\in[a,b]$ comum a todos estes intervalos, e f é contínua em ξ. Note-se finalmente que

- Existe $\delta>0$ tal que $x\in V_\delta(\xi)\cap I\Rightarrow|f(x)-f(\xi)|<\epsilon/2$.
- Para n suficientemente grande, temos $I_n\subset V_\delta(c)$, e portanto o máximo M e o mínimo m de f em I_n satisfazem

$$M-m\le|M-f(\xi)|+|f(\xi)-m|<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$

Temos então que o intervalo I_n tem certamente a propriedade-ϵ, o que é impossível, e resta-nos concluir que o intervalo inicial I tem a propriedade-ϵ para qualquer $\epsilon>0$, como queríamos provar.

Dado $\epsilon > 0$, existe portanto uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de I tal que $M_k - m_k < \epsilon$ para cada um dos correspondentes subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Notamos que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < (b-a)\epsilon,$$

donde se segue imediatamente que f é integrável em I. $\square$

O *valor médio* de um conjunto finito de números $V_1, V_2, \cdots, V_n$ é dado, como sabemos, por

$$\overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k.$$

Generalizamos esta noção para definir o valor médio de uma função integrável num dado intervalo $I = [a, b]$ como se segue:

Definição 4.3.9 (Valor Médio de uma função integrável)**.** Se f é uma função integrável em $I = [a, b]$ o seu VALOR MÉDIO no intervalo I é dado por:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemplos 4.3.10.

(1) Supondo que $v(t)$ representa a velocidade de um ponto material em movimento rectilíneo no intervalo $I = [a, b]$, então $\int_a^b v(t)dt$ é o deslocamento total do ponto no intervalo I, e

$$\overline{v} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt = \frac{\text{deslocamento}}{\text{duração}}$$

é o que usualmente designamos por *velocidade média* no intervalo I.

(2) Como $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$, segue-se que o valor médio de $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ é também $1/3$.

Observamos ainda que se m e M são, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f no intervalo I então segue-se directamente de 4.3.5 c) que $m \leq \overline{f} \leq M$. Se f é contínua em I então m e M são o *mínimo* e o *máximo* de f e segue-se do Teorema do Valor Intermédio que existe $c \in I$ tal que $f(c) = \overline{f}$, resultado que se costuma enunciar na seguinte forma:

Teorema 4.3.11 (Teorema do Valor Médio para Integrais)**.** *Se f é contínua em $I = [a, b]$ então existe $c \in I$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

4.4 Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

É possível encarar a operação de integração (tal como a de diferenciação) como um processo de obter uma nova *função* a partir de uma função dada, e essa alteração de ponto de vista revela, como veremos, a verdadeira chave para a resolução do problema de cálculo de integrais. Começamos por introduzir a noção de INTEGRAL INDEFINIDO, que é uma função da forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

onde a é uma *constante* e x é uma *variável*. Começamos por verificar que, quando a função f é integrável num dado intervalo $I = [a, b]$, a função F fica definida para qualquer $x \in [a, b]$, porque f é também integrável em qualquer intervalo $[a, x] \subseteq [a, b]$, como resulta do teorema seguinte.

Teorema 4.4.1. *Se f é integrável no intervalo $I = [a, b]$, então f é também integrável em qualquer subintervalo fechado $J \subseteq I$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo I tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Sendo $J = [c, d]$, e $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{c, d\}$, então $\mathcal{P}'$ é uma partição de I mais fina do que $\mathcal{P}$, e portanto

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}') - \underline{S}(f, \mathcal{P}') < \epsilon.$$

Notamos finalmente que $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}' \cap [c, d]$ é uma partição do subintervalo J, e deve ser claro que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}'') - \underline{S}(f, \mathcal{P}'') \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}') - \underline{S}(f, \mathcal{P}') < \epsilon.$$

Concluímos assim que f é integrável em J. □

A definição que aqui introduzimos para a função *logaritmo* é uma aplicação directa da noção de integral indefinido.

Definição 4.4.2 (Logaritmo Natural log)**.** Se $x > 0$, o LOGARITMO NATURAL de x designa-se por $\log(x)$, e é dado por

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Aproveitamos para mostrar que as propriedades do logaritmo que referimos no teorema 2.2.7 são efectivamente consequência desta definição. Observamos primeiro que o integral existe quando $x > 0$ porque a função integranda é monótona no intervalo de extremos 1 e x. Notamos também que, quando

F é um integral indefinido de f, é fácil reconhecer do teorema 4.3.2 e da nota 4.3.3 que

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Aplicamos a identidade anterior à função log para concluir que

$$\log(x+h)-\log(x)=\int_x^{x+h}\frac{1}{t}dt.$$

Deve ser claro que, se $h>0$,

$$\frac{1}{x+h}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{x}\text{ quando } x\leq t\leq x+h,$$

donde se segue do teorema 4.3.5 c) que([4])

$$\frac{h}{x+h}\leq\log(x+h)-\log(x)=\int_x^{x+h}\frac{1}{t}dt\leq\frac{h}{x}.$$

Podemos agora concluir que, quando $h>0$,

$$\frac{1}{x+h}\leq\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{x},$$

e temos assim que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}=\frac{1}{x}.$$

Deixamos como exercício adaptar estes cálculos ao caso $h<0$, para concluir que a derivada da função $\log x$ é $1/x$. A propriedade fundamental do logaritmo, expressa na identidade

$$\log(xy)=\log(x)+\log(y),$$

é na realidade uma consequência da regra de diferenciação do logaritmo. Para o reconhecer, fixamos $y>0$, e consideramos a função dada para $x>0$ por $g(x)=\log(xy)$. A função g é diferenciável, e uma aplicação imediata da regra de diferenciação da função composta conduz a $g'(x)=1/x$. Por outras palavras, a função log e a função g *têm a mesma derivada*, ou seja, a sua *diferença* tem derivada nula, e é por isso uma função *constante* para $x>0$. Mais exactamente, existe $C\in\mathbb{R}$ tal que

$$g(x)=\log(xy)=\log(x)+C$$

[4] Deve verificar que as desigualdades em b) do teorema 2.2.7 são casos particulares desta.

Tomando $x = 1$ na identidade anterior, obtemos $C = \log(y)$, o que é exactamente a "propriedade fundamental" do logaritmo acima mencionada. As restantes observações feitas sobre a função logaritmo no teorema 2.2.7 são agora muito fáceis de deduzir da definição 4.4.2, e ficam como exercício.

Para entender porque razão estas observações sobre a função logaritmo são de interesse geral para o problema do cálculo de integrais, consideramos novamente o exemplo de Arquimedes, e tomamos

$$F(x) = \int_0^x t^2 dt$$

Tal como no caso do logaritmo, notamos que

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} t^2 dt$$

Supondo que $h > 0$, é mais uma vez óbvio que $x^2 \leq t^2 \leq (x+h)^2$ para qualquer $t \in [x, x+h]$, e portanto temos

$$h \cdot x^2 \leq F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} t^2 dt \leq h \cdot (x+h)^2, \text{ e}$$

$$x^2 \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} t^2 dt \leq (x+h)^2.$$

Segue-se imediatamente que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = x^2,$$

e é mais uma vez fácil generalizar este resultado ao caso $h < 0$, para concluir que $F'(x) = x^2$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. *Esta observação permite-nos calcular o valor $F(x)$, sem recorrer a qualquer tipo de aproximação com somas superiores e/ou inferiores, porque já conhecemos funções G com derivada $G'(x) = x^2$.*

Considere-se a função dada por $G(x) = x^3/3$, que satisfaz $G'(x) = F'(x) = x^2$. A diferença $H = F - G$ satisfaz $H'(x) = 0$, e é por isso *constante*. Dito doutra forma,

$$F(x) = \int_0^x t^2 dt = G(x) + C = \frac{x^3}{3} + C.$$

Quando $x = 0$, e como $F(0) = G(0) = 0$, obtemos $C = 0$. O resultado de Arquimedes é portanto um caso especial da seguinte identidade

$$\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}.$$

Estas observações são na verdade muito gerais, e formalizam-se em dois resultados que se dizem os *Teoremas Fundamentais do Cálculo*. Relativamente à *diferenciação* de um integral indefinido, podemos desde já provar o seguinte:

Teorema 4.4.3 (1º Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se f é integrável em $I = [a,b]$, F é dada em I por $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$ e f é contínua em $c \in [a,b]$, então $F'(c) = f(c)$.*

Demonstração. Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x\in I} \ \ |x-c| < \delta \Rightarrow f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon. \tag{4.3}$$

Tomando $x > c$ para simplificar, observamos que temos

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt.$$

De acordo com (4.3), temos para $|x - c| < \delta$ que

$$\frac{1}{x-c}\int_c^x [f(c) - \epsilon]dt < \frac{F(x) - F(c)}{x-c} < \frac{1}{x-c}\int_c^x [f(c) + \epsilon]dt.$$

Concluímos que:

$$|x - c| < \delta \Rightarrow f(c) - \epsilon < \frac{F(x) - F(c)}{x-c} - f(c)| < f(c) + \epsilon.$$

Por outras palavras,

$$\lim_{x\to c} \frac{F(x) - F(c)}{x-c} = f(c), \text{ ou } F'(c) = f(c).$$

□

Exemplo 4.4.4. A função de Heaviside H é monótona, e portanto integrável, em qualquer intervalo limitado. Tomamos

$$F(x) = \int_{-1}^x h(t)\ dt = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0, \\ 0\,, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \text{donde } F'(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x > 0, \\ 0\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue-se que $F'(x) = H(x)$ para $x \neq 0$, como é garantido pelo 1º Teorema Fundamental. Note-se também que F, não sendo diferenciável na origem, é em qualquer caso contínua, o que é uma propriedade geral dos integrais indefinidos.

Teorema 4.4.5. *Seja f uma função integrável em $I = [a,b]$. A função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f,$$

é contínua em I.

Demonstração. Como a função f é integrável, por definição, é limitada, ou seja, existe $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq L, \ \forall x \in [a, b].$$

Seja então $c \in [a, b]$. Temos que:

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f \right| \leq \left| \int_c^{c+h} |f| \right| \leq L|h|.$$

É portanto claro que $F(c+h) \to F(c)$, quando $h \to 0$. □

Quando a função integranda f é contínua, qualquer um dos seus integrais indefinidos F é diferenciável e a respectiva derivada é $F' = f$. Dizemos neste caso que F é uma PRIMITIVA de f, e observamos, tal como fizémos a respeito do exemplo de Arquimedes, que o cálculo do integral de f se reduz na prática à determinação de uma qualquer primitiva de f.

Teorema 4.4.6 (2º Teorema Fundamental, ou Regra de Barrow)**.** *Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$ e $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f em I. Temos então:*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Demonstração. Com $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, notamos que $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Segue-se que a diferença $H = G - F$ é constante, ou seja,

$$G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

Com $x = a$ obtemos $G(a) = C$, e

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a), \text{ em particular } G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$$

□

É prática comum abreviar a expressão "$F(b) - F(a)$" como se segue

$$F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b .$$

Exemplos 4.4.7.

(1) Se $n \in \mathbb{N}$ então $f(t) = t^n$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, e $G(t) = t^{n+1}/(n+1)$ é uma sua primitiva. Temos portanto, e generalizando novamente o exemplo de Arquimedes,

$$\int_a^b t^n dt = \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1} \right)$$

(2) A função $f(t) = \cos t$ é contínua em $\mathbb{R}$, e $G(t) = \operatorname{sen} t$ é uma sua primitiva. Temos portanto

$$\int_0^\pi \cos t dt = \operatorname{sen} t|_{t=0}^{t=\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 1$$

(3) A função $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$, e $G(t) = \arctan t$ é uma sua primitiva. Temos portanto

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t|_{t=-1}^{t=1} = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$$

(4) A função $f(t) = e^t$ é contínua em $\mathbb{R}$, e é uma sua primitiva. Temos portanto

$$\int_0^2 e^t dt = e^t\Big|_{t=0}^{t=2} = e^2 - 1$$

(5) Se $n \in \mathbb{N}$ então $f(t) = 1/t^n$ é uma função contínua em qualquer intervalo I que não contenha a origem. Se $n > 1$ então a função $G(t) = \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}$ é uma primitiva de f em I. Temos por exemplo que $G(t) = -\frac{1}{2t^2}$ é uma primitiva de $f(t) = \frac{1}{t^3}$ em $I =]0, \infty[$, donde

$$\int_1^2 \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{t=1}^{t=2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

A relação entre a continuidade e a integrabilidade de uma dada função f é uma questão técnica difícil, que não analisamos neste texto, mas é evidente de exemplos anteriores que existem funções integráveis que não são contínuas em todos os pontos do seu domínio. Por esta razão, é interessante observar que a regra de Barrow pode ser demonstrada sem fazer qualquer referência explícita à continuidade da integranda. O argumento utilizado revela ainda uma relação profunda entre o 2º Teorema Fundamental e o Teorema de Lagrange que discutimos no Capítulo anterior.

Teorema 4.4.8 (2º Teorema Fundamental do Cálculo (2ª Versão))**.** *Se F é contínua em $I = [a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, onde $F' = f$, e f é integrável em I, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Dada uma qualquer partição $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ do intervalo I, observamos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})],$$

porque a soma à direita é telescópica. Do Teorema de Lagrange aplicado em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, concluímos que existem pontos $x_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ tais que

$\dfrac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(x_k^*)$ ou $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$, donde

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Com $m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$ e $M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}$, é evidente que $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$, e portanto

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Como $F(b) - F(a)$ satisfaz a condição

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq F(x) - F(a) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \text{ para qualquer partição } \mathcal{P},$$

e por hipótese a função f é integrável, podemos concluir que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

□

É muito interessante notar que a hipótese de integrabilidade de f é *indispensável* neste teorema, porque é possível que f tenha primitiva sem que seja integrável. Dito doutra forma, existem funções que são derivadas de outras funções, mas que não são integráveis. O próximo exemplo ilustra essa possibilidade

Exemplo 4.4.9. Definimos $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $G(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2})$ para $x \neq 0$, e $G(0) = 0$. A função G é diferenciável em $\mathbb{R}$, e a sua derivada é dada por

$$G'(x) = 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2}), \text{ para } x \neq 0, \text{ e } G'(0) = 0.$$

A função G é diferenciável em $\mathbb{R}$, mas a sua derivada $f = G'$ não é integrável em nenhum intervalo que contenha a origem, porque f é *ilimitada* nesse intervalo.

O 2º Teorema Fundamental na versão que acabámos de apresentar mostra que a sua aplicação não depende efectivamente de restrições sobre a continuidade da integranda, mas exige ainda que a condição $G'(x) = f(x)$ seja satisfeita em todos os pontos do intervalo de integração, com a possível excepção dos extremos desse intervalo. Notamos a seguir que podemos aligeirar esta restrição, pelo menos em casos simples onde a identidade $G'(x) = f(x)$ falha num número *finito* de pontos.

Teorema 4.4.10 (2º Teorema Fundamental do Cálculo (3ª Versão))**.** *Se G é contínua em $I = [a, b]$, f é integrável em I, e $G'(x) = f(x)$, excepto num conjunto finito D, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Supomos que existe apenas um ponto $c \in]a, b[$ onde a condição $G'(x) = f(x)$ falha. O 2º Teorema Fundamental na sua versão 4.4.8 permite-nos concluir que

$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx \text{ e } F(b) - F(c) = \int_c^b f(x)dx.$$

Concluímos do teorema 4.3.2 que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= [F(c) - F(a)] + [F(c) - F(a)] = F(b) - F(a)$$

□

Exemplos 4.4.11.

(1) Seja $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a função SINAL de x, dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 \text{ para } x > 0, \text{ e} \\ -1 \text{ para } x < 0. \end{cases}$$

A função f não é contínua na origem, qualquer que seja o valor $f(0)$, mas f é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$. Sendo $F(x) = |x|$, então F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável para $x \neq 0$, onde $F'(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Segue-se que em qualquer intervalo $I = [a, b]$ temos

$$F(b) - F(a) = \int_a^x f(t)dt, \text{ ou seja, } \int_a^b \operatorname{sgn} t dt = |b| - |a|.$$

(2) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x, \text{ se } x < 0 \\ x^2, \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

A função g é integrável em qualquer intervalo limitado $[a, b]$, independentemente do valor $g(0)$. Qualquer função G da forma

$$G(x) = \begin{cases} x - \cos x + C_1, \text{ se } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{3} + C_2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

satisfaz $G'(x) = g(x)$ para $x \neq 0$, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2. Um cálculo imediato mostra que

$$\lim_{h\to 0^+} G(x) = C_2 \text{ e } \lim_{h\to 0^-} G(x) = C_1 - 1$$

Tomando $C_2 = 0$ e $C_1 = 1$, e definindo $G(0) = 0$, a função G é contínua em $\mathbb{R}$, e temos, por exemplo,

$$\int_{-1}^{2} g(x)dx = G(2) - G(-1) = \frac{8}{3} - (-1) + \cos(-1) = \frac{11}{3} + \cos 1$$

4.5 Técnicas de Primitivação e Integração

Como vimos na secção anterior, o cálculo de *integrais* está directamente relacionado com o cálculo de *primitivas*. Passamos aqui a designar por

$$\int f(x)\ dx$$

uma qualquer primitiva de f num dado domínio I, que quase sempre deixamos subentendido. Por outras palavras, convencionamos que

$$F(x) = \int f(x)\ dx \text{ em } I \iff F'(x) = f(x), \text{ para qualquer } x \in I.$$

Recordamos que se I é um *intervalo* e F é uma primitiva de f em I então

$$G(x) = \int f(x)\ dx \text{ em } I \iff G(x) = F(x) + C, \text{ para qualquer } x \in I.$$

Deve ser claro que *todas as regras de diferenciação que estudámos até aqui são também regras de primitivação.* Os exemplos seguintes, de primitivas *imediatas*, ilustram isto mesmo.

Exemplos 4.5.1.

(1) $F(x) = \int e^x\ dx \text{ em } \mathbb{R} \iff F(x) = e^x + C$

(2) $F(x) = \int \operatorname{sen} x\ dx \text{ em } \mathbb{R} \iff F(x) = -\cos x + C$

(3) $F(x) = \int \cos x\ dx \text{ em } \mathbb{R} \iff F(x) = \operatorname{sen} x + C$

(4) $F(x) = \int x^n\ dx \text{ em } \mathbb{R} \iff F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(5) $F(x) = \int \dfrac{1}{1+x^2} \text{ em } \mathbb{R} \iff F(x) = \arctan x + C$

Quando o domínio em causa não é a recta real, pode ser restrito a um intervalo, como no exemplo seguinte, mas pode ser mais complexo. Repare-se que no exemplo (7) existem *duas* constantes arbitrárias, uma para cada um dos intervalos disjuntos em que se decompõe o domínio.

(6) Quando $I =]-\pi/2, \pi/2[$,

$$F(x) = \int \sec^2 x\ dx \text{ em } I \Longleftrightarrow F(x) = \tan x + C \text{ em } I\ .$$

(7) $F(x) = \displaystyle\int 1/x\ dx \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longleftrightarrow$

$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + C_1, \text{ para } x > 0 \text{ e} \\ \log|x| + C_2, \text{ para } x < 0. \end{cases}$$

Deve reconhecer-se que, em geral, o problema da primitivação pode ser tecnicamente muito difícil. Por exemplo, e apesar de não demonstrarmos aqui esse facto, existem funções "elementares", como $f(x) = e^{x^2}$ ou $g(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, cujas primitivas não podem ser expressas como combinações algébricas simples de outras funções conhecidas, e são por isso simplesmente novas funções, a juntar às que já referimos. Existem no entanto múltiplas técnicas auxiliares de cálculo de primitivas, que passamos a estudar, e que nos permitem alargar substancialmente a classe de funções que podemos primitivar, e portanto integrar, por processos relativamente simples.

Primitivação e Integração por Partes

Vamos agora estudar alguns métodos de primitivação que serão úteis no cálculo explícito de integrais. Começamos por um método que permite, por exemplo, calcular uma primitiva da função $f(x) = x \log x$.

Teorema 4.5.2 (Primitivação por partes)**.** *Sejam f, g funções diferenciáveis em $I = [a, b]$. Então:*

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.$$

e portanto, se qualquer um dos integrais referidos existe, o outro existe igualmente e temos

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

Demonstração. Para a demonstração basta observar que a regra de derivação do produto se escreve:

$$(fg)' = f'g + fg' \Leftrightarrow fg' = (fg)' - f'g.$$

Portanto, temos que:

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g = fg - \int f'g.$$

$\square$

Exemplos 4.5.3.

(1) Para calcular uma primitiva de $x \log x$, tomamos

$$f(x) = \log x \text{ e } g'(x) = x \text{ donde } f'(x) = 1/x \text{ e } g(x) = x^2/2$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\int x \log x \; dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2} \; dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}.$$

(2) É por vezes útil tomar $g'(x) = 1$. Por exemplo, para calcular uma primitiva de $\log x$, tomamos

$$f(x) = \log x \text{ e } g'(x) = 1 \text{ donde } f'(x) = 1/x \text{ e } g(x) = x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\int \log x \; dx = x \log x - \int \frac{x}{x} \; dx = x \log x - x.$$

(3) Pode ser necessário aplicar repetidamente o método de primitivação por partes até atingir a primitiva pretendida. Para calcular uma primitiva de $x^2 e^x$, tomamos

$$f(x) = x^2 \text{ e } g'(x) = e^x \text{ donde } f'(x) = 2x \text{ e } g(x) = e^x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(i)} \quad \int x^2 e^x \; dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \; dx.$$

Para calcular uma primitiva de xe^x, tomamos

$$f(x) = x \text{ e } g'(x) = e^x \text{ donde } f'(x) = 1 \text{ e } g(x) = e^x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(ii)} \quad \int xe^x \; dx = xe^x - \int e^x \; dx = xe^x - e^x.$$

Por simples substituição do resultado em (ii) na identidade (i), obtemos então

$$\int x^2 e^x \; dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x \; dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x).$$

(4) A aplicação do método de primitivação por partes pode conduzir à primitiva inicial, mas mesmo nesse caso é possível terminar o cálculo. Para calcular uma primitiva de $e^x \cos x$, tomamos

$$f(x) = e^x \text{ e } g'(x) = \cos x \text{ donde } f'(x) = e^x \text{ e } g(x) = \operatorname{sen} x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(i)} \quad \int e^x \cos x \; dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \; dx.$$

Para calcular uma primitiva de $e^x \operatorname{sen} x$, tomamos

$$f(x) = e^x \text{ e } g'(x) = \operatorname{sen} x \text{ donde } f'(x) = e^x \text{ e } g(x) = -\cos x$$

A regra de primitivação por partes conduz a:

$$\text{(ii)} \quad \int e^x \operatorname{sen} x \; dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x \; dx.$$

A substituição do resultado em (ii) na identidade (i) conduz agora a

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x - \int e^x \cos x \; dx), \text{ ou}$$

$$\int e^x \cos x \; dx = \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} e^x \cos x$$

Primitivação e Integração por Substituição

Um outro método muito útil no cálculo de primitivas é a seguinte aplicação directa da regra de diferenciação da função composta:

Teorema 4.5.4 (Primitivação por substituição)**.** *Se f e g são funções diferenciáveis, então:*

$$F(u) = \int f(u) du \Longrightarrow F(u(x)) = \int f(g(x)) g'(x) \; dx.$$

Este resultado escreve-se usualmente de forma mais sucinta, mas imprecisa, porque deixa subentendida a substituição de u por $u(x)$, como

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)\ dx$$

Demonstração. Para a demonstração basta observar que se F é uma primitiva de f, então, pela regra de derivação da função composta:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)\, g' = (f \circ g)\, g'$$

□

Na prática, o método de primitivação por substituição para o cálculo do integral

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx,$$

tem três passos:

(1) Substituir no integral original $g(x)$ por u e $g'(x)\, dx$ por du. Depois desta manipulação, só a variável u deve aparecer;

(2) Encontrar uma primitiva da função resultante (em que a variável é u);

(3) Substituir de volta u por $g(x)$.

Os próximos exemplos ilustram este método.

Exemplos 4.5.5.

(1) Tomamos $u = \operatorname{sen} x$ e $du = \cos x dx$, para obter

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\ dx = \int u^5\ du = \frac{u^6}{6} = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}.$$

(2) Tomamos $u = \log x$ e $du = \frac{1}{x}dx$, para obter

$$\int \frac{1}{x \log x}\ dx = \int \frac{1}{u}\ du = \log u = \log(\log x).$$

(3) Nos exemplos acima é relativamente simples identificar a substituição necessária. Em geral, no entanto, essa é a principal dificuldade na aplicação da técnica. Para calcular

$$\int \sqrt{1 - x^2}\ dx,$$

recordamos a identidade $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} = \cos u$, que sugere a substituição $x = \operatorname{sen} u$, com $dx = \cos u du$. Temos então

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1+\cos(2u)}{2} du =$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2u)}{4} = \frac{u}{2} + \frac{2\operatorname{sen}(u)\cos(u)}{4} = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}$$

Note-se a título de curiosidade que a clássica fórmula sobre a área do círculo é

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left.\frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Primitivação de Funções Racionais

É possível primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função da forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0},$$

em termos de funções elementares. Notem que podemos assumir $a_n = b_m = 1$. Por outro lado, também basta considerar o caso $n < m$, pois se $n \geq m$ podemos recorrer à divisão de polinómios para escrever:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

onde $g(x)$ é um polinómio e $r(x)$ é o resto da divisão, que tem grau inferior a $q(x)$. Por exemplo:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 3x - 4}{x^2+1} = x^2 - 5 + \frac{3x+1}{x^2+1}.$$

Assim, vamos assumir que $a_n = b_m = 1$ e $n < m$.

Antes de enunciarmos o caso geral, ilustramos o método quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio do terceiro grau:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 + a_1 x + a_0}{x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza do polinómio denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raízes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + C\log|x-\gamma|\,.$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2 + b^2)\,, \text{ com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx &= \int \frac{B(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int \frac{Ba+b^2}{(x-a)^2+b^2}\,dx\\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \frac{Ba+b^2}{b}\int \frac{1/b}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{B}{2}\log((x-a)^2+b^2) + \frac{Ba+b^2}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).\end{aligned}$$

Caso Geral. O que acabamos de ver é um exemplo particular do seguinte resultado geral:

Teorema 4.5.6 (Decomposição em Fracções Parciais)**.** *Seja $n < m$, e considere-se a função racional*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}.$$

Então o denominador pode ser factorizado na forma:

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}([x-a_1]^2+b_1^2)^{s_1}\cdots([x-a_l]^2+b_l^2)^{s_l},$$

e a função racional pode ser decomposta na forma:

$$\begin{aligned}&\frac{p(x)}{q(x)} =\\ &\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] +\\ &\quad + \left[\frac{A_{1,1}+B_{1,1}x}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}+B_{1,s_1}x}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{s_1}}\right] + \cdots +\\ &\qquad + \left[\frac{A_{l,1}+B_{l,1}x}{(x-a_l)^2+b_l^2} + \cdots + \frac{A_{l,s_l}+B_{l,s_l}x}{((x-a_l)^2+b_l^2)^{s_l}}\right].\end{aligned}$$

Notem que a factorização de $q(x)$ dada pelo teorema tem o seguinte significado:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes reais de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $r_1, \ldots, r_k$;

- $a_1 \pm i\, b_1, \ldots, a_l \pm i\, b_l$ são as raízes complexas de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $s_1, \ldots, s_l$;

Não demonstraremos este teorema. Este resultado reduz o cálculo da primitiva de uma função racional a primitivas que já conhecemos, pois temos

(a) Para as raízes reais:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^r}\,dx = \begin{cases} a\log(x-\alpha)\,, & \text{se } r=1, \\ \frac{a}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}\,, & \text{se } r>1. \end{cases}$$

(b) Para as raízes complexas:

$$\int \frac{A+Bx}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx + (A+aB)\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx.$$

A primeira primitiva pode ser calculada recorrendo à substituição $u = (x-a)^2+b^2$. A segunda primitiva pode ser calculada por aplicação sucessiva de primitivação por partes, como no exercício seguinte:

Exercício 4.5.7. Usando primitivação por partes, mostre que para $s>1$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^s}\,dx = \frac{1}{2s-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{s-1}}\,dx.$$

Primitivação de Funções Trigonométricas

Para calcular primitivas de funções trigonométricas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\; dx,$$

usaremos as fórmulas trigonométricas conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Há vários casos a considerar:

Caso 1. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x\; dx \text{ ou } \int \cos^n x\; dx,$$

onde $n = 2k$ é par. As fórmulas trigonométricas acima permitem obter, sucessivamente, uma expressão em potências mais baixas de seno ou coseno, que eventualmente sabemos como primitivar. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\; dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\;dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\;dx \\ &= \int \frac{1}{4}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\;dx + \frac{1}{8}\int (1+2\cos(4x))\;dx\end{aligned}$$

e nesta última expressão sabemos calcular todas as primitivas.

Caso 2. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \; dx \text{ ou } \int \cos^n x \; dx,$$

onde $n = 2k+1$ é ímpar. Neste caso, utilizamos a fórmula trigonométrica fundamental seguida de uma substituição. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k+1} x \; dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \; dx \\ &= \int (1-u^2)^k \; du \quad (u = \operatorname{sen} x).\end{aligned}$$

Caso 3. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde n ou m são ímpares, são tratados de forma análoga ao anterior. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \; dx &= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \; dx \\ &= \int u^4(1-u^2) du \quad (u = \operatorname{sen} x).\end{aligned}$$

Caso 4. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde n e m são ambos pares. Neste caso, utilizamos as fórmulas trigonométricas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, de forma análoga ao Caso 1.

Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cosenos

Suponhamos que queremos calcular uma primitiva de uma função racional de senos e cosenos:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; dx.$$

Existe uma substituição (talvez um pouco inesperada!) que permite reduzir esta primitiva a uma primitiva de uma função racional usual. Como veremos depois, é possível primitivar qualquer função racional usual.

Consideremos então a substituição:

$$u = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan u, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2} \; du.$$

Observamos que:

$$y = \frac{x}{2} = \arctan u \;\Rightarrow\; u^2 = \tan^2 y = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

Resolvendo em ordem a u^2, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{u^2}{1+u^2}, \qquad \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{1+u^2}.$$

Usando as formulas trigonométricas para $\operatorname{sen}(2y)$ e $\cos(2y)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(2y) = 2 \operatorname{sen} y \cos y = 2\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \\
\cos(x) &= \cos(2y) = \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 2\frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.
\end{aligned}$$

Assim, a substituição $x = 2\arctan u$ fornece:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du.$$

Concluímos, tal como tínhamos afirmado, que esta substituição transforma uma primitiva de uma função racional de senos e cosenos numa primitiva de uma função racional usual.

Exemplo 4.5.8.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{sen} x} &= \int \frac{1}{3 + 5\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du \qquad (u = \tan\frac{x}{2}) \\
&= \int \frac{1+u^2}{3u^2 + 10u + 3} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du = \int \frac{2}{3u^2+10u+3}\, du.
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Sucessões e Séries

5.1 Definições Básicas

Ocupamo-nos neste capítulo de um problema que à primeira vista pode parecer impossível de resolver: o de definir e calcular somas com um número *infinito* de parcelas, somas essas a que chamaremos *séries*. Trata-se no entanto de uma questão muito antiga, já discutida há mais de 2.500 anos por filósofos e matemáticos da Antiguidade Clássica, e a teoria construída em torno desta ideia é hoje uma ferramenta com grande impacto na Matemática e nas suas aplicações.

Zenão de Eleia, um filófoso grego do século V A.C., é recordado em particular por um conjunto interessante de problemas que envolvem somas infinitas, e que o seu autor apresentava como paradoxos. Num dos seus exemplos mais simples, Zenão considerou a soma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots, \tag{5.1}$$

onde usamos as reticências $\cdots$ como terminação à direita para sugerir que a soma "não tem fim", ou seja, inclui como parcelas os inversos de *todas* as potências naturais de 2. Esta soma é usualmente interpretada na forma do

PARADOXO DO CORREDOR: *Um corredor desloca-se do ponto A para o ponto B, que estão separados por uma distância unitária $d = 1$. O corredor move-se a uma velocidade constante e também unitária $v = 1$, e portanto o tempo necessário à deslocação é $T = d/v = 1$. Por outro lado, o corredor demora 1/2 do tempo a percorrer a primeira metade do percurso, 1/4 do tempo a percorrer metade do percurso restante, 1/8 do tempo a percorrer metade do restante, e assim sucessivamente, pelo que o tempo total da sua deslocação pode ser representado pela soma infinita indicada em 5.1. Zenão concluía desta observação que, se a soma de um número infinito de parcelas positivas só pode ser infinita, então o corredor nunca chegaria ao seu destino, o que é manifestamente absurdo!*

Em alternativa, e é essa a interpretação actual, concluímos deste exemplo que a soma de um número infinito de parcelas positivas pode *em certos casos* ser finita. No exemplo de Zenão, é natural esperar que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1 \tag{5.2}$$

A *Teoria das Séries*, cujo estudo vamos agora iniciar, permite efectivamente atribuir um total finito a algumas somas com um número infinito de parcelas, e em particular sustentar a identidade que acabámos de apresentar. Observamos primeiro que a notação que já usámos para representar somatórios se adapta facilmente à representação de séries. Por exemplo, para representar a soma infinita (a *série*) em 5.2 escrevemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Note-se de passagem que a variável k pode ser designada por qualquer outro símbolo. A título de ilustração, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

Dizemos por isso que k é uma variável *muda*. Note-se também que podemos alterar o domínio de variação da variável k sem alterar a série em causa. Por exemplo, tomando $n=k-1$ ou $i=k+1$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}$$

Qualquer série é a soma dos termos de uma dada sucessão de *termo geral* a_k, ou seja, é da forma

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k.$$

Dizemos igualmente que a_k é o *termo geral* da série. Podemos por isso dizer que o exemplo de Zenão é a série de termo geral $a_k=\frac{1}{2^k}$, com $1\leq k<\infty$.

Para decidir se uma dada série tem soma ou não, começamos por adicionar apenas um número *finito* de termos da referida série, para calcular o que chamamos de uma *soma parcial* da série. Dada uma série qualquer $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, existe uma soma parcial para cada valor de n, ou seja, as somas parciais da série formam uma SUCESSÃO, desta vez com termo geral:

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

No exemplo de Zenão, temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \text{ ou seja,} \tag{5.3}$$

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{3}{4},\ S_3 = \frac{7}{8},\ S_4 = \frac{15}{16},\ S_5 = \frac{31}{32}, \cdots$$

Neste caso específico, é fácil apresentar uma representação mais simples para as somas S_n. Começamos por observar que

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Subtraindo esta última identidade da identidade 5.3, obtemos uma soma telescópica que pode ser imediatamente simplificada

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Concluímos assim que

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ donde } S_n = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} \tag{5.4}$$

O sentido a dar à identidade em 5.2 é fácil de compreender em termos da noção de limite, que Zenão naturalmente desconhecia. A soma em 5.2 é DEFINIDA como o LIMITE da soma finita S_n, quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \tag{5.5}$$

Esta conclusão nada tem de surpreendente, porque sabemos que $2^n \to \infty$ quando $n \to \infty$, e portanto $\frac{1}{2^n} \to 0$. Temos mais geralmente

Definição 5.1.1 (Soma de uma série, série convergente)**.** A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é CONVERGENTE se e só a SUCESSÃO DAS SOMAS PARCIAIS, de termo geral $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, tem LIMITE $S \in \mathbb{R}$ quando $n \to +\infty$. Dizemos neste caso que a série tem SOMA S, e escrevemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Caso contrário, a série diz-se DIVERGENTE.

Exemplos 5.1.2.

(1) A série de Zenão $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente e tem soma 1, porque

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 1, \text{ quando } n \to +\infty$$

(2) A série de termo geral constante $a_k = 1$ é *divergente*, porque

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to \infty.$$

(3) A série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ é *divergente*, porque

$$S_n = \begin{cases} -1, \text{ se } k \text{ é ímpar, e} \\ 0, \text{ se } k \text{ é par} \end{cases}$$

Usamos muitas vezes a expressão "NATUREZA" (de uma série) para nos referirmos à sua propriedade de ser convergente ou divergente. Por exemplo, a natureza da série de Zenão é "convergente". Veremos adiante que, quando estudamos uma dada série, é frequentemente possível determinar a sua natureza sem calcular explicitamente a sua soma. O próximo resultado é fundamental na teoria das séries, e permite identificar com facilidade muitos exemplos de séries *divergentes*.

Teorema 5.1.3. *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Consideramos as somas parciais $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, e supomos que a série tem soma $S \in \mathbb{R}$, ou seja, $S_m \to S$ quando $m \to \infty$. Definimos ainda $T_m = S_{m-1}$, tomando para este efeito $S_0 = 0$. A sucessão de termo geral T_m resulta de "atrasar" a sucessão S_m de um termo, e é claro que temos igualmente $T_m \to S$ quando $m \to +\infty$.([1])

Como $a_n = S_n - S_{n-1} = S_n - T_m$, é claro que $a_n \to S - S = 0$. □

Exemplos 5.1.4.

(1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ é divergente, porque $\frac{n}{\sqrt{n+1}} \to +\infty \neq 0$.

(2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$ é divergente, porque $a_n = \frac{n}{2n+3} \to \frac{1}{2} \neq 0$.

(3) A série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^2$ é divergente, porque $a_k = (-1)^k k^2$ não tem limite.

É absolutamente ESSENCIAL entender que uma dada série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode satisfazer a condição $a_n \to 0$, e mesmo assim ser *divergente*, o que bem entendido não contradiz a afirmação em 5.1.3. Por outras palavras, a condição $a_n \to 0$ é *necessária*, mas *não suficiente*, para garantir a convergência da série em causa. O próximo exemplo é uma clássica ilustração deste facto, e será repetidamente referido no que se segue.

[1] A título de ilustração, no exemplo de Zenão temos $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots$ e $T_1, T_2, T_3, T_4, \cdots = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \cdots$

Exemplo 5.1.5. A SÉRIE HARMÓNICA é a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. É óbvio que o seu termo geral satisfaz $a_n = 1/n \to 0$, mas a série é na realidade divergente, um facto que não é certamente evidente. Para o reconhecer, basta-nos notar que, por razões geometricamente evidentes (ilustradas na figura 5.1 para o caso $m = 4$), a soma parcial S_m satisfaz a desigualdade:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} > \int_1^{m+1} \frac{1}{x} dx = \log(m+1). \tag{5.6}$$

Esta desigualdade é na realidade verdadeira porque S_m é a soma superior da função $f(x) = 1/x$ determinada pela partição $\mathcal{P} = \{1, 2, \cdots, n+1\}$. Como o integral em causa é $\log(m+1)$, e $\log(m+1) \to +\infty$, podemos concluir que $S_m \to +\infty$. Dito doutra forma, *a série harmónica é divergente.*

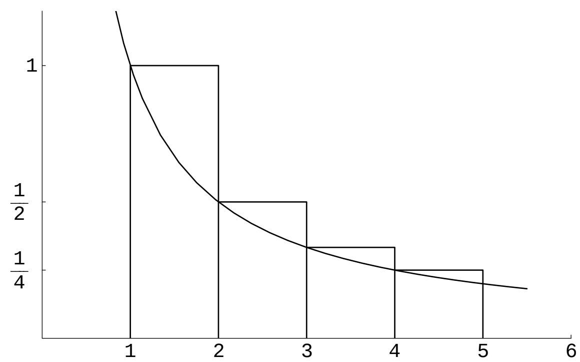


Figura 5.1: Relação entre $\log 5$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n}$

O exemplo de Zenão com que iniciámos esta secção é apenas um caso particular do que chamamos uma *série geométrica*, e veremos que estas séries, apesar da sua simplicidade, têm um papel fundamental na teoria. Em geral, uma série diz-se *geométrica* quando os seus termos formam uma *progressão geométrica*, tal como definida em 5.2.2.5. Mais precisamente,

Definição 5.1.6 (Série Geométrica)**.** Uma série é GEOMÉTRICA se e só se é da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + \cdots = a \cdot (1 + r + r^2 + \cdots)$$

O exemplo de Zenão é a série geométrica obtida pela escolha $a = r = 1/2$, e é muito interessante reconhecer que o processo que usámos para calcular a sua soma é aplicável a qualquer série geométrica. Basta notar que, sendo S_n a soma parcial da série geométrica em 5.1.6, temos novamente que:

$$S_n - r \cdot S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a \cdot r^{k-1} - a \cdot r^k \right) = a - a \cdot r^n = a \cdot (1 - r^n), \text{ donde}$$

$$(1 - r) \cdot S_n = a \cdot (1 - r^n) \text{ e se } r \neq 1 \text{ então } S_n = \frac{a - r^n}{1 - r}.$$

A determinação da soma da série geométrica é agora imediata.

Teorema 5.1.7. *A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ converge se e só se $a = 0$ ou $|r| < 1$. Caso $|r| < 1$, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

Demonstração. Supomos que $a \neq 0$, porque o caso $a = 0$ é trivial. Se a série converge então $a \cdot r^{n-1} \to 0$, pelo teorema 5.1.3, e portanto $r^n \to 0$. É fácil calcular o limite de r^n, e temos

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} \text{não existe, se } r \leq -1 \\ 0, \text{ se } |r| < 1 \\ 1, \text{ se } r = 1 \\ +\infty, \text{ se } r > 1 \end{cases}$$

Concluímos que se a série converge então $r^n \to 0$ e $|r| < 1$. Por outro lado, se $|r| < 1$ então $r^n \to 0$, donde

$$S_n = \frac{a - r^n}{1 - r} \to \frac{a}{1 - r}$$

$\square$

É um exercício muito simples mostrar, a partir da definição, as seguintes operações algébricas sobre séries convergentes:

Proposição 5.1.8. *Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Então, as séries $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k)$ também são convergentes e*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Exemplo 5.1.9. Consideramos a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{5}{2^{n-1}}\right)$. Como vimos, as séries geométricas de razão 1/2 e 1/3 são convergentes, e temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{1-1/3}=\frac{3}{2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

Concluímos assim que a série inicial é convergente, e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{5}{2^{n-1}}\right)=(2)\frac{3}{2}+(5)(2)=13.$$

Exemplo 5.1.10. A representação de números reais por dízimas infinitas é uma aplicação da noção de série. Quando escrevemos, por exemplo, $x = 0,a_1a_2a_3a_4a_5\cdots$, onde os a_n são algarismos da representação de x na base decimal usual (e portanto a_n é um inteiro entre 0 e 9), estamos simplesmente a dizer que

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$$

Veremos adiante que a série acima é sempre convergente, e portanto efectivamente representa um número real, mas podemos desde já mostrar que, no caso de uma dízima infinita *periódica*, a série converge para um número *racional*, que é aliás fácil de determinar. Ilustramos esta afirmação com um exemplo, mas deve ser claro que o argumento é aplicável a *qualquer* dízima periódica.

Considere-se então $x = 0,123123\cdots$ (subentendendo aqui que os algarismos 123 se repetem indefinidamente). Note-se que

$$x=0,123+0,000123+\cdots=\frac{123}{1.000}+\frac{123}{1.000.000}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{123}{10^{3n}}$$

A série acima é claramente a série geométrica com

$$a=\frac{123}{1.000}\text{ e }r=\frac{1}{1.000},\text{ donde }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{123}{10^{3n}}=\frac{\frac{123}{1.000}}{1-\frac{1}{1.000}}=\frac{\frac{123}{1.000}}{\frac{999}{1.000}}=\frac{123}{999}$$

Note-se de passagem que um dado número real pode ter duas representações decimais distintas, o que ocorre sempre que tem uma representação com um número finito de algarismos. Temos por exemplo que $1 = 1,000\cdots = 0,9999\cdots$, porque

$$0,999\cdots=0,9+0,09+0,009+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}=1$$

É especialmente surpreendente reconhecer que muitas das funções que já referimos podem ser *representadas*, e em particular *calculadas*, usando séries de um tipo muito específico, ditas *séries de potências*. Um exemplo particularmente simples desta realidade resulta mais uma vez da série geométrica, porque a identidade

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots, \text{ para } |x| < 1 \tag{5.7}$$

é certamente uma *representação* da função f dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$ por uma *série de potências de* x. Repare-se que o domínio da função f, que é $D_f = \{ \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$, é *distinto* do conjunto no qual a soma da série coincide com a função dada, porque este conjunto é como vimos o intervalo $]-1, +1[$.

É fácil obter mais exemplos de funções representadas por séries deste tipo por substituições simples de x em 5.7. Substituindo x por $-x$, ou por $-x^2$, temos imediatamente

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \text{ para } |x| < 1 \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \text{ para } |x| < 1 \tag{5.9}$$

Intuitivamente, as séries de potências generalizam a noção de *polinómio*, e podem ser imaginadas como polinómios com um número de termos que pode ser infinito, ou com grau que pode ser infinito. Como veremos, estas séries de potências podem ser diferenciadas e primitivadas como se fossem somas finitas. Por exemplo, a primitivação das séries acima conduz a

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \text{ para } |x| < 1 \tag{5.10}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ para } |x| < 1 \tag{5.11}$$

Estas últimas identidades são aliás também válidas quando $x = 1$, o que não é óbvio das identidades iniciais em 5.10 e 5.11. Por exemplo, a identidade 5.11 reduz-se para $x = 1$ à série dita de Gregory, e foi descoberta ainda no século XVII.

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{5.12}$$

Analogamente, a série 5.10 quando $x = 1$ conduz a outra identidade interessante:

$$\log(2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{5.13}$$

5.2 Sucessões

A secção anterior deve deixar claro que o estudo das séries é, em larga medida, uma parte da teoria mais geral das *sucessões.* É por isso conveniente relembrarmos e precisarmos alguns dos seus conceitos mais fundamentais.

Definição 5.2.1. Uma SUCESSÃO REAL é uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $u(n)$ é o TERMO GERAL, ou TERMO DE ORDEM n, da sucessão u, representando-o normalmente por u_n.

Usaremos qualquer um dos símbolos u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) para representar uma mesma sucessão real.

Exemplos 5.2.2.

(1) $u_n = 3$ é o termo geral da sucessão $u = (3, 3, 3, \ldots)$.

(2) Se $u_n = 2 + 3n$ então $u = (5, 8, 11, \ldots)$.

(3) Se $u_n = 3 \cdot 2^n$ então $u = (6, 12, 24, \ldots)$.

(4) Uma PROGRESSÃO ARITMÉTICA é uma qualquer sucessão que satisfaz a condição $u_{n+1} = u_n + r$ (onde r é constante), para todo o $n \in \mathbb{N}$. O seu termo geral é $u_n = a + (n-1)r$, onde $a = u_1$ é o primeiro termo, e r é a RAZÃO. A sucessão $u_n = 2+3n$ do Exemplo (2) é uma progressão aritmética, com primeiro termo $a = 5$ e razão $r = 3$.

(5) Uma PROGRESSÃO GEOMÉTRICA é uma qualquer sucessão que satisfaz a condição $u_{n+1} = u_n \cdot r$ (r constante), para todo o $n \in \mathbb{N}$. O seu termo geral é $u_n = a \cdot r^{n-1}$, onde $a = u_1$ é o primeiro termo, e r é a RAZÃO. A sucessão $u_n = 3 \cdot 2^n$ do Exemplo (3) é uma progressão geométrica, com primeiro termo $a = 6$ e razão $r = 2$. A sucessão referida no exemplo de Zenão é a progressão geométrica com $a = r = 1/2$.

(6) É comum definir sucessões por recorrência. Um exemplo clássico é a SUCESSÃO DE FIBONACCI, dada por $u_1 = u_2 = 1$ e $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Note-se que $u = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$.

(7) Por vezes não se conhecem expressões "práticas" para o termo geral de uma sucessão, nem qualquer relação de recorrência para os seus termos. Um exemplo clássico é aqui o da sucessão de todos os números naturais primos, i.e., a sucessão $u = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots)$.

É claro que qualquer sucessão não passa de uma função real de variável real com domínio $D = \mathbb{N}$, e portanto as ideias e resultados sobre limites que estudámos no Capítulo 2 aplicam-se a sucessões como se aplicam a quaisquer outras funções. Exactamente por isso, no caso de uma sucessão só faz sentido considerar o seu limite quando $n \to \infty$, porque só definimos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ quando a é ponto de acumulação do domínio de f.

Sendo u uma sucessão, designamos o seu limite por um qualquer dos seguintes símbolos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim u_n = \lim_{n\to\infty} u(n)$$

É fácil concluir da definição 2.4.1 que

Proposição 5.2.3.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ *se e só se* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *se e só se* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ *se e só se* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon}$.

É também fácil mostrar que

Proposição 5.2.4. *Se a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem limite quando* $x \to a$, $u_n \neq a$ *e* $u_n \to a$ *quando* $n \to +\infty$ *então*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Em particular, se $u_n = f(n)$ *e existe o limite de* f *quando* $x \to +\infty$ *então*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Exemplos 5.2.5.

(1) Para mostrar que $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ usando apenas a proposição 5.2.4, supomos dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Existe por razões óbvias um natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, tal que $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$. É imediato verificar que

$$n > N \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon, \text{ ou seja, } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(2) Para calcular o limite de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, consideramos a função dada por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ para $x > 0$, donde $u_n = f(n)$. Observamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log(1+1/x)} = e^1 = e,$$

porque temos, da regra de Cauchy, que

$$\lim_{x\to+\infty} x\log(1+1/x) = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{1/(1+y)}{1} = 1$$

(3) Se $u_n = n\,\mathrm{sen}(1/n)$ então

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\,\mathrm{sen}(1/n) = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}(1/x) = \lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,y}{y} = 1$$

(4) Seja $0 < a < 1$, donde $\log a < 0$. Temos então

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log a} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

Sendo certo que os limites de sucessões são casos especiais de limites de funções, é igualmente verdade que os limites de funções se podem reduzir a limites de sucessões, através do seguinte resultado:

Teorema 5.2.6. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Então,* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *sse* $\lim f(u_n) = b$ *para qualquer sucessão real $(u_n) \subset D$ tal que $u_n \to a$ e $u_n \neq a$.*

Demonstração. A implicação ($\Rightarrow$) foi referida na proposição 5.2.4. Para mostrarmos ($\Leftarrow$), suponhamos por absurdo que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = b$, para toda a sucessão $(x_n) \subset D$ com $u_n \to a$, mas que b não é o limite de $f(x)$ quando $x \to a$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que *para todo* o $\delta > 0$ existe um $x \in D$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x)-b| > \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \frac{1}{n}$, obtemos para cada $n \in \mathbb{N}$ um número x_n tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n)-b| > \varepsilon.$$

A primeira condição garante que $x_n \to a$ e a segunda condição garante que b não é limite de $f(x_n)$, o que contradiz a nossa hipótese. □

Esta proposição é por vezes uma forma prática de mostrar que a função f *não tem* limite em a dado, determinando para isso sucessões $u_n, v_n \to a$, mas tais que $f(u_n)$ e $f(v_n)$ têm limites *distintos*.

Exemplo 5.2.7. Seja $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ e $a = 0$. Considerem-se as sucessões

$$u_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ e } v_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$$

É claro que $u_n \to 0$ e $v_n \to 0$, e temos $f(u_n) = \mathrm{sen}(2\pi n) = 0$ e $f(v_n) = \mathrm{sen}(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$. Pelo Teorema 5.2.6, concluímos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe, porque $f(u_n) \to 0$ e $f(v_n) \to 1$.

As seguintes definições são já conhecidas:

Definição 5.2.8. Seja (u_n) uma sucessão real. Então:

(a) (u_n) diz-se **crescente** (resp. **estritamente crescente**) se $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$) para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) (u_n) diz-se **decrescente** (resp. **estritamente decrescente**) se $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) (u_n) diz-se **majorada** se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leq M$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(d) (u_n) diz-se **minorada** se existir $m \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \geq m$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão diz-se **monótona** (resp. **estritamente monótona**) se for crescente ou decrescente (resp. estritamente crescente ou decrescente). Uma sucessão diz-se **limitada** se for majorada e minorada.

Proposição 5.2.9. *Qualquer sucessão (u_n) convergente é limitada.*

Demonstração. Se $u_n \to a$ então existe um natural N tal que

$$n > N \Rightarrow a - 1 < u_n < a + 1$$

É claro que o conjunto $\{u_n : n > N\}$ é limitado, porque está contido no intervalo de $a - 1$ a $a + 1$, e o conjunto $\{u_n : n \leq N\}$ é limitado, porque é *finito*. Concluímos assim que o conjunto de todos os termos da sucessão é igualmente limitado. □

Notem que uma sucessão limitada pode não ser convergente: a sucessão $u_n = (-1)^n$ é claramente limitada, mas não é convergente. No entanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.10. *Seja (u_n) uma sucessão real.*

(a) Se (u_n) é crescente e majorada então é convergente e

$$\lim u_n = \sup \{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Se (u_n) é decrescente e minorada então é convergente e

$$\lim u_n = \inf \{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Em particular, toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Demonstração. Faremos o caso em que (u_n) é crescente e majorada (o caso em que (u_n) é decrescente e minorada é completamente análogo).

Como a sucessão (u_n) é majorada, temos que existe

$$a = \sup\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,.$$

Queremos portanto provar que

$$u_n \to a \ \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ : \ (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Seja então dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela propriedade do supremo, existe algum u_N tal que $a - \varepsilon < u_N \leq a$. Como (u_n) é crescente, vemos que para todo o $n > N$:

$$u_N \leq u_n \leq a \ \Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq a\,.$$

Temos então que

$$|u_n - a| < \varepsilon \text{ para todo o } n > N,$$

como se pretendia mostrar. □

5.3 Séries de Termos Não-Negativos

Séries de termos não-negativos (STNN) são séries da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \quad \text{com} \quad a_k \geq 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Proposição 5.3.1. *Uma STNN $\sum_k a_k$ é convergente se e só se a sua sucessão de somas parciais (s_n) for majorada.*

Demonstração. Por definição, a série é convergente se e só se a sucessão das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ for convergente. Como

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

vemos que a sucessão (s_n) é monótona crescente. Logo, segue dos Teoremas 5.2.9 e 5.2.10 que (s_n) é convergente se e só se for majorada. □

Na prática, pode ser difícil descobrir se a sucessão das somas parciais de uma dada STNN é ou não majorada. Os diversos CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA que passamos agora a estudar são técnicas específicas criadas para determinar a natureza de STNN's com base na proposição anterior. Começamos por considerar um critério a que aludimos quando estabelecemos a natureza divergente da série harmónica.

Critério de Comparação

Quando $0 \leq a_n \leq b_n$ para qualquer n dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DOMINA a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Neste caso, é intuitivamente evidente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

sendo que se a soma da série à direita é finita, é-o também a soma da série à esquerda, e se a soma da série à esquerda é infinita, é-o também a soma da série à direita. É esse o conteúdo do próximo teorema:

Teorema 5.3.2 (Critério de Comparação para STNN)**.** *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *duas sucessões reais tais que* $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge;}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge.}$$

Demonstração. Sejam (s_n) e (t_n) as sucessões de somas parciais das séries dadas, i.e.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\,.$$

É evidente que $s_n \leq t_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Usando a Proposição 5.3.1, podemos então concluir que:

- $\sum_k b_k$ converge $\Rightarrow (t_n)$ majorada $\Rightarrow (s_n)$ majorada $\Rightarrow \sum_k a_k$ converge.
- $\sum_k a_k$ diverge $\Rightarrow s_n \to +\infty \Rightarrow t_n \to +\infty \Rightarrow \sum_k b_k$ diverge.

$\square$

Exemplos 5.3.3.

(1) A série de Zenão é convergente, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Segue-se que qualquer série com termo geral $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$ é igualmente convergente, e tem soma ≤ 1. A título de exemplo, as seguintes séries (que não são geométricas) são todas convergentes, e todas têm soma inferior a 1, porque os respectivos termos gerais não excedem $1/2^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n^2+1)}$$

(2) A série harmónica é divergente, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Portanto, qualquer série com termo geral $b_n \geq \frac{1}{n}$ é igualmente divergente. A título de exemplo, as seguintes séries são todas divergentes, porque os respectivos termos gerais excedem $1/n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}$$

(3) Se $\alpha < 1$ então $n^{\alpha} \leq n$ e portanto $1/n^{\alpha} \geq 1/n$. Concluímos assim que

$$\text{A série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ diverge quando } \alpha \leq 1.$$

As séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ dizem-se SÉRIES DE DIRICHLET, e veremos a seguir que são convergentes quando $\alpha > 1$.

É interessante observar que podemos aplicar o critério de comparação desde que a desigualdade $a_n \leq b_n$ seja válida apenas para todos os valores de n "suficientemente grandes", ou seja,

Teorema 5.3.4 (Critério de Comparação para STNN)**.** *Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais, e suponha-se que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para qualquer $n \geq m$. Então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ converge;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ diverge.}$$

Demonstração. Definimos

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n < m \\ a_n, \text{ se } n \geq m \end{cases} \text{ e analogamente } \tilde{b}_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n < m \\ b_n, \text{ se } n \geq m \end{cases}$$

Podemos aplicar o teorema 5.3.2 às séries $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n$, donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ diverge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \text{ diverge.}$$

Resta-nos verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

Considerando a série de termo a_n, definimos $c_n = a_n - \tilde{a}_n$ e notamos que a série de termo geral c_n é obviamente convergente, porque a sua soma é uma soma finita. Observamos da proposição 5.1.8 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, porque } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge, porque } \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

□

Critério Integral

A técnica que usámos para estabelecer a divergência da série harmónica (exemplo 5.1.5) é aplicável a qualquer série de termo geral $a_n = f(n)$, onde $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função *decrescente*. Basta-nos observar que

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$ é uma soma INFERIOR de $\displaystyle\int_1^n f(x)dx$, e
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ é uma soma SUPERIOR de $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)dx$.

Escrevendo como é usual

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y f(x)dx,$$

obtemos um resultado particularmente simples e fácil de aplicar.

Teorema 5.3.5 (Critério Integral para STNN)**.** *Seja $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função positiva decrescente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge se e só se existe e é finito o limite:*

$$\int_1^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\ dx.$$

Demonstração. Primeiro supomos que o limite $\int_1^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\ dx$ existe e é finito. Temos então

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx,$$

e segue-se da proposição 5.3.1 que a série $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ é convergente, donde é óbvio que $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ é igualmente convergente.

Supondo agora que a série é convergente, temos

$$\int_1^n f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

e é fácil concluir que

$$\int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

□

Exemplo 5.3.6 (Séries de Dirichlet)**.** Vimos que a **série de Dirichlet**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é divergente, quando } \alpha \leq 1.$$

O Critério Integral esclarece facilmente a natureza da série para $\alpha > 1$. Neste caso, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}\right] = \frac{1}{\alpha-1}$$

Segue-se do teorema 5.3.5 que a série de Dirichlet é CONVERGENTE quando $\alpha > 1$.

Note-se igualmente que a ideia subjacente ao teste integral permite por vezes obter estimativas para o *erro* cometido quando substituímos a soma de uma dada série por uma sua soma parcial.

Exemplo 5.3.7. Considere-se a série de Dirichlet com $\alpha = 2$. Pretendemos estimar a diferença $S - S_n$, onde

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ e portanto } S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

É fácil reconhecer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n} \text{ donde } S_n < S < S_n + \frac{1}{n}$$

Tal como observámos para o critério de comparação em 5.3.4, o critério integral pode ser formulado mais geralmente como se segue:

Teorema 5.3.8 (Critério Integral para STNN)**.** *Seja $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função positiva decrescente para $x \geq \alpha$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge se e só se existe e é finito o limite:*

$$\int_1^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\ dx.$$

Exemplo 5.3.9. Considere-se a série $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k/2}$. A função dada por $f(x) = xe^{-x/2}$ é decrescente para $x \geq 2$ e temos

$$\int_1^b xe^{-x/2}dx = -2(x+2)e^{-x/2}\Big|_1^b \to 6e^{-1/2}.$$

Concluímos que a série em questão é convergente.

Critério do Limite

A verificação das desigualdades referidas em 5.3.4 pode ser substituída pelo cálculo do limite da razão a_n/b_n, se esse limite existir.

Teorema 5.3.10 (Critério do Limite para STNN)**.** *Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais de termos positivos, tais que*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \ \text{com}\ 0 < L < +\infty.$$

Então, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza, i.e., ou ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração. A hipótese

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty,$$

garante que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < 2L \cdot b_n\,.$$

Basta agora aplicar o Critério Geral de Comparação do Teorema 5.3.4 a estas desigualdades. □

O argumento anterior pode ser adaptado para mostrar que:

- Se $L = 0$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, e
- Se $L = +\infty$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Exemplos 5.3.11.

O critério do limite requer a utilização de séries com natureza conhecida, por exemplo, séries geométricas ou séries de Dirichlet.

(1) Para determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{3^n - 2^n}\,.$$

é natural compará-la com a série geométrica $\sum 1/3^n$, que é convergente, porque a sua razão é $r = 1/3$. De facto, com $a_n = \frac{1}{3^n - 2^n}$ e $b_n = 1/3^n$ temos

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n - 2^n}} = \lim \frac{3^n - 2^n}{3^n} = 1 - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1.$$

Como a série geométrica $\sum \frac{1}{3^n}$ de razão $r = 1/3 < 1$ converge, concluímos do Teorema 5.3.10 que as séries são da mesma natureza, ou seja, a série $\sum \frac{1}{3^n - 2^n}$ também converge.

(2) Para determinar a natureza da série $\sum \frac{2n+1}{n\sqrt{n(n+1)}}$, observamos primeiro que, quando n é "grande", temos

$$\frac{2n+1}{n\sqrt{n(n+1)}} \approx \frac{2n}{n\sqrt{n^2}} \approx \frac{2}{n},$$

o que sugere a utilização do critério do limite com $a_n = \frac{2n+1}{n\sqrt{n(n+1)}}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Neste caso, obtemos

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{2n+1}{n\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim \frac{2 + 1/n}{\sqrt{1 + 1/n^2}} = 2.$$

Como a série harmónica $\sum 1/n$ diverge, segue-se que a série $\sum \frac{2n+1}{n\sqrt{n(n+1)}}$ diverge igualmente.

Critério da Razão

O critério da razão, também dito critério de d'Alembert, permite por vezes esclarecer a natureza de uma série de termo geral $a_n > 0$ quando a razão a_{n+1}/a_n tem limite.

Teorema 5.3.12 (Critério da Razão para STNN (d'Alembert))**.** *Seja $\sum_n a_n$ uma série numérica, com $a_n > 0$ e tal que*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Então:

(a) se $r < 1$ a série $\sum_n a_n$ converge.

(b) se $r > 1$ a série $\sum_n a_n$ diverge.

Demonstração. Suponhamos que $r < 1$. Se escolhermos $r < s < 1$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s, \quad \forall n \geq N.$$

É simples estabelecer por indução que:

$$a_{N+k} \leq s^k a_N, \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}.$$

Como $s < 1$ a série geométrica $\sum_n^\infty a_N s^{-N} s^n$ converge. É também claro que

$$\frac{a_{N+k}}{a_N s^{-N} s^{N+k}} \leq \frac{s^k a_N}{a_N s^k} = 1$$

Pelo Critério Geral de Comparação para STNN, concluímos que a série $\sum_k^\infty a_k$ também converge.

Suponhamos agora que $r > 1$. Neste caso, se escolhermos $1 < s < r$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s, \quad \forall n \geq N.$$

Isto mostra que:

$$a_{N+k} \geq s a_{N+k-1} \geq s^2 a_{N+k-2} \geq \cdots \geq s^k a_N \geq a_N,$$

donde $\lim a_k \neq 0$ e a série $\sum_k^\infty a_k$ diverge. □

Exemplos 5.3.13.

(1) Seja $r > 0$ e suponha-se que queremos determinar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}.$$

Fazendo $a_n = r^n/n!$, temos então que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \frac{r}{n+1} = 0 < 1.$$

Concluímos pelo Critério da Razão (Teorema 5.3.12) que, qualquer que seja $r > 0$, a série dada é convergente.

(2) O critério da razão nada diz quando $r = 1$. Por exemplo,

- para a série harmónica $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ temos $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) \to 1$ e a série é *divergente*.
- para a série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ temos $a_{n+1}/a_n = n^2/(n+1)^2 \to 1$ e a série é *convergente*.