Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2015/2016
19 de dezembro de 2015
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

MEAmbi - MEBiol

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.0) Determine o polinómio característico de A e os valores próprios de A.

   (b) (1.0) Verifique se A é diagonalizável. Nesse caso, indique uma matriz invertível S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1}AS$.

2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(1,3)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_2$ (repectivamente) e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear tais que:

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{I}(T)$ e verifique se T é injectiva.

   (b) (1.0) Identifique, caso exista, uma base (ordenada) $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $M(T;\mathbf{B};\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) (1.0) Resolva, em $\mathbb{R}^2$, a equação linear $T(x,y) = 1 + t + t^2$.

3. Considere $\mathbb{R}^5$ munido com o produto interno usual e $U = L(\{u_1, u_2, u_1+u_2\})$, onde $u_1 = (1,2,0,0,1)$ e $u_2 = (0,-1,1,0,2)$.

   (a) (1.0) Determine uma base ortogonal de U.

   (b) (1.0) Determine uma base de $U^\perp$.

   (c) (1.0) Calcule a distância entre $(4,1,1,1,0)$ e $U^\perp$.

4. Seja $A = I - \alpha uu^T$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $u^T u = [1]$.

   (a) (1.0) Verifique se A é ortogonalmente diagonalizável.

   (b) (1.0) Determine o polinómio característico de A.

FIM