Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1ª Época - 17 de Junho de 2024 - 8h - V1 - Duração: 1 hora

Nome: ______________________ **Número:** ____________ **Curso:** ____________

Justifique apropriadamente todas as suas respostas!

1. Considere o sólido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\ y > 0\,,\ 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ 1 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

(5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de D em termos de integrais iterados da forma: $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(4 val.) b) Sabendo que D tem densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = z(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$, calcule a massa total de D, usando uma mudança de coordenadas apropriada.

Resolução:

a)

$$Vol(D) = \int_1^2 \left(\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{(4-z)^2-y^2}} 1dx \right) dy \right) + \left(\int_2^{4-z} \left(\int_0^{\sqrt{(4-z)^2-y^2}} 1dx \right) .dy \right) dz$$

b) utilizando coordenadas cilíndricas,

$$M = \int_D \sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_2^3 \left(\int_1^{4-\rho} \frac{z}{\rho} \rho \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

2. Seja L a linha definida por

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = 1;\ z = y\}.$$

Sejam

$$G(x, y, z) = \Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z^2\Big), \qquad H(x, y, z) = (y - x, -x, z).$$

(3 val.) a) Indique, justificadamente, se o campo H é conservativo no seu domínio.

(3 val.) b) Calcule o trabalho de H ao longo de L, quando percorrida uma vez no sentido anti-horário e observada a partir do ponto $(0, 0, 10)$.

(2 val.) c) Calcule o trabalho de G ao longo de L, quando percorrida uma vez no sentido horário e observada a partir do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução:

a) Tem-se que

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = -1 \neq \frac{\partial H_1}{\partial y} = 1,$$

pelo que H é um campo vectorial de classe C^1 que não é fechado e que não é, portanto, conservativo.

b) Tem-se que $H = f + h$, com

$$f(x, y, z) = (y, -x, 0), \;\; h(x, y, z) = (-x, 0, z) = \nabla\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2\right).$$

Logo, sendo L uma linha fechada,

$$\int_L H = \int_L f,$$

pois $\int_L h = 0$. Como a componente vertical de f se anula, podemos calcular o trabalho de f ao longo de L tomando a projecção de L no plano $z = 0$ que é a elipse E de equação $2x^2 + y^2 = 1$, que é a fronteira da região $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\big\}$. Logo, pelo teorema de Green,

$$\int_L H = \int_L f = \int_E = -\int\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = -2 \times \text{area}\,(D) = -\sqrt{2}\pi.$$

c) Tem-se que

$$(0, 0, z^2) = \nabla\left(\frac{z^3}{3}\right),$$

pelo que este campo realiza trabalho nulo ao longo da linha fechada L. Por outro lado, o campo

$$\Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\Big)$$

é fechado pelo que o trabalho que realiza ao longo de L é igual ao trabalho que realiza ao longo da cricunferência de equações $z = 0, x^2 + y^2 = 1$, percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0, 0, 10)$ e que, como visto na aula, vale -2π. Logo,

$$\int_L G = -2\pi.$$

(3 val.)

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $\nabla f(x,y,z) \neq 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ um caminho que satisfaz a condição $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$. Mostre que γ não é um caminho fechado.

Resolução:

Tem-se,

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int \nabla f d\gamma = \int_a^b ||\nabla f(\gamma(t))||^2 dt > 0,$$

porque ∇f não se anula. Logo, $\gamma(a) \neq \gamma(b)$.