Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1ª Época - 17 de Junho de 2024 - 13h - V1 - Duração: 1 hora

Nome: ____________________ **Número:** ____________ **Curso:** ____________

Justifique apropriadamente todas as suas respostas!

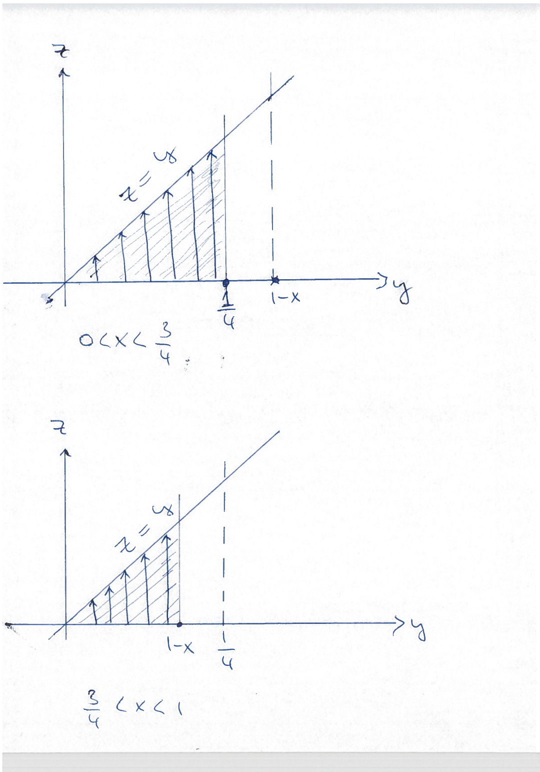
(5 val.) 1. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\ z > 0\,,\ y < \frac{1}{4}\,,\ z < y\,,\ x + y < 1\}$$

em termos de integrais iterados da forma: $\int(\int(\int dz)dy)dx$.
(Não precisa de calcular o integral.)

Resolução:

Fazendos cortes perpendiculares ao eixo Ox temos:



Logo

$$\text{vol}(V) = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^{y} dz \right) dy \right) dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{y} dz \right) dy \right) dx\ .$$

(4 val.) 2. Considere o conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\, y^2+z^2 < 4\,,\, x^2 < y^2+z^2\}$. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule $\int_D x\sqrt{y^2+z^2}$.

Resolução:

O eixo de simetria é o eixo Ox. Por conseguinte, vamos recorrer a coordenadas cilíndricas adaptadas ao eixo Ox,

$$(x,y,z) = (x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \quad , \quad x \in \mathbb{R},\ \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in]0, 2\pi[\ .$$

O Jacobiano é ρ. O domínio D é transformado no domínio D' definido por $x > 0$, $\rho < 2$, $x < \rho$. Assim temos

$$\begin{aligned}\int_D x\sqrt{y^2+z^2}dxdydz &= \int_{D'} x\rho^2\,dxd\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_0^\rho x\,\rho^2\,dx\right)d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \rho^4 d\rho\right)d\theta = \frac{32\pi}{5}\,.\end{aligned}$$

(3 val.) 3. Considere a linha L descrita pelas equações $z = 2 - (x^2 + y^2)$, $z = 1$, com densidade de massa $d(x, y, z) = 2z$. Obtenha uma parametrização de L e calcule a sua massa.

Resolução:

Recorrendo a coordenadas cilíndricas, as equações que definem a linha L tomam a forma

$$\begin{cases} z = 2 - \rho^2 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Logo, uma parametrização de L é

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad , \quad t \in \,]0, 2\pi[\;.$$

Como

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)\;,$$

obtemos $||\gamma'(t)|| = 1$ e a massa M é

$$M = \int_0^{2\pi} d(\gamma(t))\, ||\gamma'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

4. Seja F o campo vectorial dado por $F(x,y) = (e^{y^2}, 2xye^{y^2} - \operatorname{sen} y)$.

(3 val.) a) Mostre que F é um campo gradiente e determine um potencial para F.

(2 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Resolução:

a) $F = (F_1, F_2)$ é um campo vectorial de classe C^1 em todo o seu domínio $\mathbb{R}^2$. Como

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2ye^{y^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \ ,$$

F é um campo fechado em $\mathbb{R}^2$. Uma vez que F é um campo fechado em $\mathbb{R}^2$ que é um aberto simplesmente conexo, F é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, i.e. $F = \nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y})$ em $\mathbb{R}^2$. Primitivando $F_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ em ordem a x obtemos

$$\Phi(x,y) = xe^{y^2} + g(y) \ .$$

Substitutindo em $F_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ concluímos que $g'(y) = -\sin y$. Logo, um potential é

$$\Phi(x,y) = xe^{y^2} + \cos y \ .$$

b) Como F é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, o trabalho de F ao longo do caminho γ (que não é fechado) é dado por

$$\Phi(\gamma(\frac{\pi}{2})) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(0,1) - \Phi(1,0) = \cos 1 - 2 \ .$$

(3 val.) 5. Sejam $G_1 : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ e $G_2 : \mathbb{R}^2\backslash\{(3,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definidos por

$$G_1(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) \quad , \quad G_2(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-3)^2+y^2}, \frac{x-3}{(x-3)^2+y^2}\right).$$

Sabendo que G_1 e G_2 são campos fechados nos seus domínios, diga justificadamente se $G = G_1 + G_2$ é campo gradiente em cada uma das seguintes regiões:

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$,

ii) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0),(3,0)\}$,

iii) $\mathbb{R}^2\backslash L$, onde L é o segmento de recta unindo $(0,0)$ a $(3,0)$.

Resolução:

i) O conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ é um aberto simplesmento conexo. G é um campo vectorial de classe C^1 em D. Uma vez que G é um campo fechado em D que é um aberto simplesmente conexo, G é um campo gradiente em D.

ii) G não é um campo gradiente em $D = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0),(3,0)\}$, porque o trabalho de G ao longo da circunferência $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ percorrida no sentido positivo é diferente de zero. Recorrendo à parametrização de Γ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in]0,2\pi[$ e atendendo a que G_2 é um campo fechado num conjunto simplesmente conexo que contém Γ, obtemos

$$\int_\Gamma G = \int_\Gamma G_1 + \int_\Gamma G_2 = \int_\Gamma G_1 = \int_0^{2\pi} G_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = -2\pi \neq 0. \qquad (1)$$

iii) G é um campo gradiente em $D = \mathbb{R}^2\backslash L$, porque G é um campo de classe C^1 no aberto D e porque o trabalho de G ao longo de qualquer caminho seccionalmente regular fechado em D é zero.

Qualquer caminho seccionalmente regular fechado Γ em D ou é homotópico em D a um ponto (e nesse caso o trabalho de G é zero) ou é homotópico em D à circunferência $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 5^2\}$. Como G é um campo fechado de classe C^1 em D temos $\int_\Gamma G = \int_{\Gamma_c} G = \int_{\Gamma_c} G_1 + \int_{\Gamma_c} G_2$. Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ e $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2+y^2 = 1\}$. Uma vez que Γ_c é homotópico a Γ_1 em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, onde G_1 é um campo fechado, temos $\int_{\Gamma_c} G_1 = \int_{\Gamma_1} G_1$. Análogamente temos $\int_{\Gamma_c} G_2 = \int_{\Gamma_2} G_2$. Usando o resultado (1) concluímos que

$$\int_{\Gamma_1} G_1 + \int_{\Gamma_2} G_2 = 0\ ,$$

e por conseguinte $\int_\Gamma G = 0$, i.e. o trabalho de G ao longo de qualquer caminho seccionalmente regular fechado em D é zero.