Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1ª Época - 17 de Junho de 2024 - 10h30 - V1 - Duração: 1 hora

Nome: ______________________ **Número:** ____________ **Curso:** ____________

Justifique apropriadamente todas as suas respostas!

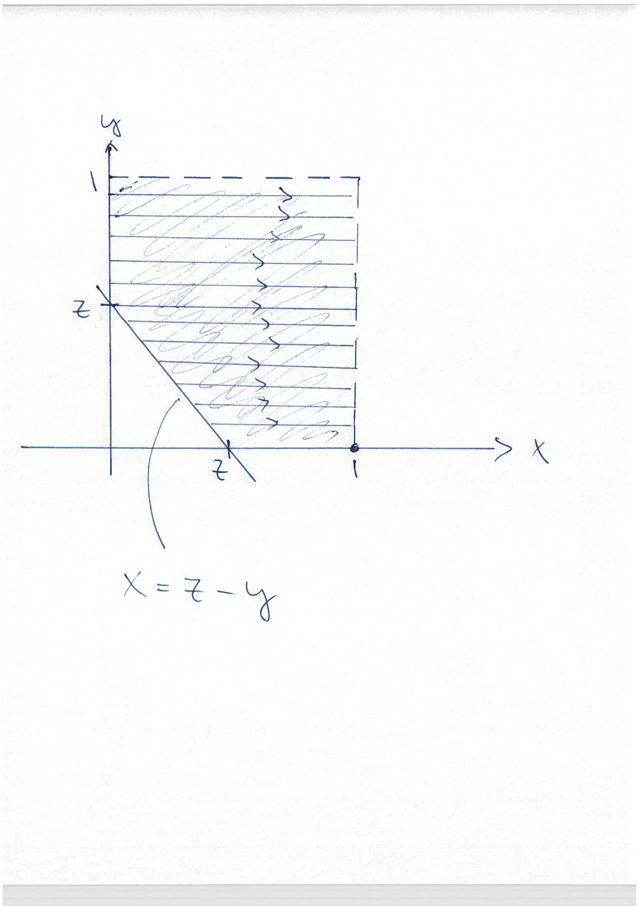
(5 val.) 1. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1\,,\, 0 < y < 1\,, z < x + y\,,\, 0 < z < 1\}$$

em termos de integrais iterados da forma: $\int(\int(\int dx)dy)dz$.
(<u>Não</u> precisa de calcular o integral.)

Resolução:

Fazendo cortes perpendiculares ao eixo Oz temos:



Logo

$$\mathrm{vol}(D) = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{z-y}^1 dx \right) dy \right) dz + \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^1 dx \right) dy \right) dz\,.$$

(4 val.) 2. Considere o conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0,\ x^2+y^2 < 1\,,\ z < 1+x^2+y^2\}$. Calcule $\int_V f$, onde $f(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2+y^2}$, recorrendo a uma mudança de coordenadas apropriada.

Resolução:

O eixo de simetria é o eixo Oz. Por conseguinte, vamos recorrer a coordenadas cilíndricas,

$$(x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \quad , \quad z \in \mathbb{R},\ \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in]0, 2\pi[\ .$$

O Jacobiano é ρ. O domínio V é transformado no domínio V' definido por $\theta < \frac{\pi}{2}$, $z > 0$, $\rho < 1$, $z < 1+\rho^2$. Assim temos

$$\begin{aligned}\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_{V'} \frac{\rho^2\sin\theta}{1+\rho^2}dzd\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1+\rho^2}\frac{\rho^2\,\sin\theta}{1+\rho^2}\,dz\right)d\rho\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \rho^2\,\sin\theta\,d\rho\right)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\ .\end{aligned}$$

(3 val.) 3. Calcule o comprimento do caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definido por $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, \frac{2\sqrt{2}}{3}\, t^{3/2})$.

Resolução:

Como

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, \sqrt{2}\, t^{1/2}) \ ,$$

obtemos

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 2t} = \sqrt{(t+1)^2} = t + 1 > 0 \ .$$

O comprimento de γ é

$$\int_0^1 ||\gamma'(t)||\, dt = \int_0^1 (t+1)\, dt = (\frac{1}{2}t^2 + t)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ .$$

4. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ e considere o campo vectorial $F : A \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2-1} + y, \frac{y}{x^2+y^2-1} + x\right)$.

(2 val.) a) Determine se F é um campo fechado em A.

(3 val.) b) Determine um potencial para F em A e calcule o integral de linha de F ao longo do caminho $\gamma(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t), t \in [0, \pi/4]$.

Resolução:

a) $F = (F_1, F_2)$ é um campo vectorial de classe C^1 no aberto A. Como

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2} + 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y} ,$$

F é um campo fechado em A.

b) O campo vectorial F é dado pela soma de dois campos vectoriais, $F = G + H$, com $G(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2-1}, \frac{y}{x^2+y^2-1}\right)$ e $H(x,y) = (y, x)$.

O campo vectorial $H = (H_1, H_2)$ é de classe C^1 em todo o seu domínio $\mathbb{R}^2$. Uma vez que H é um campo fechado em $\mathbb{R}^2$ que é um aberto simplesmente conexo, H é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, i.e. $H = \nabla\Phi_1 = (\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial y})$ em $\mathbb{R}^2$. Primitivando $H_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$ em ordem a x obtemos

$$\Phi_1(x,y) = xy + g(y) .$$

Substitutindo em $H_2 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}$ concluímos que $g'(y) = 0$. Logo, um potential para H é

$$\Phi_1(x,y) = xy .$$

O campo vectorial G é um campo radial de classe C^1 em A, ou seja $G(x,y) = f(r)\,e_r$, onde e_r é o vector radial unitário e onde a função f só depende de $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$e_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(x,y) \quad , \quad f(r) = \frac{r}{r^2-1} .$$

Uma primitiva de f no aberto $\{r \in \mathbb{R}^+ : r > 1\}$ é $\frac{1}{2}\log(r^2-1)$. Logo, um potencial para G em A é

$$\Phi_2(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2-1) .$$

Por conseguinte, um potential para F em A é $\Phi(x,y) = \Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y)$.

Como F é um campo gradiente em A, o trabalho de F ao longo do caminho γ (que não é fechado) é dado por

$$\Phi(\gamma(\frac{\pi}{4})) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}) - \Phi(2,0) = \frac{1}{2}\log\frac{11}{6} + 3 .$$

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e seja $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ o gráfico de f. Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial contínuo dado por

$$G(x,y,z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

e seja $\gamma : [0,1] \to \Gamma_f$ um caminho de classe C^1. Determine os valores possíveis de $\int G \cdot d\gamma$.

Resolução:

Se γ é um caminho com valores sobre Γ_f temos,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))),$$

e

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)),$$

pelo que $G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ e $\int G\, d\gamma = 0$.