Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP2-v2 – 10 de Maio de 2024 – 20h
Duração: 45 minutos

Apresente e justifique todas as respostas

[6.0] 1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z)=(x+1)^2+2y^2-4xy-4y+z^4.$$

Resolução. Tendo em conta que

$$\nabla f(x,y,z)=\left(2(x+1)-4y,4y-4(x+1),4z^3\right),$$

o único ponto crítico é $(-1,0,0)$. A hessiana de f é

$$Hf(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 12z^2\end{bmatrix},$$

que tem um valor próprio positivo e um negativo. Logo o ponto crítico é um ponto de sela.

2. Considere a função

$$\varphi(x,y,z,w)=y^2z-\cos(xz)+\ln(w-x).$$

[3.0] a) Justifique que as soluções da equação $\varphi(x,y,z,w)=0$ são, na vizinhança de $(0,1,1,1)$, o gráfico de uma função $x=h(y,z,w)$ de classe C^1.

Resolução. A função φ é de classe C^1, $\varphi(0,1,1,1)=0$, e

$$D\varphi(x,y,z,w)=\left[\ z\sin(xz)-\tfrac{1}{w-x}\quad 2yz\quad y^2+x\sin(xz)\quad \tfrac{1}{w-x}\ \right].$$

Como $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,1,1,1)=-1\neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante que as soluções da equação $\varphi(x,y,z,w)=0$ são, na vizinhança de $(0,1,1,1)$, da forma $(h(y,z,w),y,z,w)$, onde $h(y,z,w)$ é uma função de classe C^1 definida numa vizinhança de $(1,1,1)$.

[2.0] b) Calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(1,1,1)$.

Resolução. Como $\varphi(h(y,z,w),y,z,w)=0$, o Teorema de derivação da função composta implica que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(h(y,z,w),y,z,w)\frac{\partial h}{\partial y}(y,z,w)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(h(y,z,w),y,z,w)=0.$$

Temos

$$D\varphi(0,1,1,1)=[\ -1\quad 2\quad 1\quad 1\ ],$$

e portanto

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,1,1)=2.$$

3. Considere as funções $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-4,x+y+z-2)$ e $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=z$. Seja $\mathbb{M}:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ F(x,y,z)=(0,0)\}$.

[1.5] a) Quais os pontos de $\mathbb{M}$ em que DF tem característica máxima? Justifique.

Resolução. A matriz jacobiana DF tem duas linhas, dadas respectivamente por $(2x, 2y, 2z)$ e $(1, 1, 1)$. A característica será máxima (igual a 2) sempre que estes dois vectores sejam linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$. Mas $(2x, 2y, 2z)$ é linearmente dependente de $(1, 1, 1)$ se e só se $x = y = z$, e nenhum ponto da forma (x, x, x) pertence a $\mathbb{M}$ (uma vez que o sistema $3x^2 = 4$ e $3x = 2$ não tem soluções). Logo DF tem característica máxima em todos os pontos de $\mathbb{M}$.

[4.5] b) Determine o máximo de f em $\mathbb{M}$ recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução. Sejam $F_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4$ e $F_2(x, y, z) := x + y + z - 2$. Temos que resolver o sistema $\nabla f = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2$ e $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$. Da primeira equação segue que $0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2$ e $0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2$ e $1 = 2\lambda_1 z + \lambda_2$. Em particular, $2\lambda_1 x = 2\lambda_1 y$ e portanto $\lambda_1 = 0$ ou $x = y$. Mas $\lambda_1 = 0$ implica $1 = \lambda_2 = 0$, o que é absurdo, pelo que $x = y$. De $F_1 = F_2 = 0$ segue então que $2x^2 + z^2 = 4$ e $2x + z = 2$. Substitutindo a segunda equação na primeira, temos que $2x^2 + (2 - 2x)^2 = 4$, que tem duas soluções: $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$. No primeiro caso temos $x = y = 0$ e $z = 2$ e no segundo caso $x = y = \frac{4}{3}$ e $z = -\frac{2}{3}$. Mas $f(0, 0, 2) = 2$ e $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$, pelo que o máximo de f em $\mathbb{M}$ é igual a 2.

[3.0] 4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $(0, 0, 0)$ é um ponto crítico de f com $f(0, 0, 0) = 0$. Supondo que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2},$$

mostre que a matriz hessiana de f em $(0, 0, 0)$ é a matriz identidade.

Resolução. Como $f \in C^2$, pela fórmula de Taylor,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\langle Hf(0, 0, 0)(x, y, z), (x, y, z)\rangle + o(\|(x, y, z)\|^2)$$

pelo que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\langle Hf(0, 0, 0)(x, y, z), (x, y, z)\rangle}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2f(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} = 1,$$

Se v é um vector próprio de $Hf(0, 0, 0)$ associado ao valor próprio λ,

$$1 = \lim_{(x,y,z)=tv,t\to 0} \frac{\langle Hf(0, 0, 0)(x, y, z), (x, y, z)\rangle}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^2\|v\|^2}{t^2\|v\|^2} = \lambda.$$

Assim sendo, os valores próprios de $Hf(0, 0, 0)$ são todos iguais a 1 e concluímos que $Hf(0, 0, 0)$ é a matriz identidade.