Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP2-v1 – 10 de Maio de 2024 – 20h
Duração: 45 minutos

Apresente e justifique todas as respostas

[6.0] 1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + 4xy - 8y + z^4.$$

Resolução. Tendo em conta que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2(x-2) + 4y, 2y + 4(x-2), 4z^3\right),$$

o único ponto crítico é $(2,0,0)$. A hessiana de f é

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{bmatrix},$$

que tem um valor próprio positivo e um negativo. Logo o ponto crítico é um ponto de sela.

2. Considere a função

$$f(x,y,z,w) = x^2y + \cos(yw) + \ln(z-w).$$

[3.0] a) Justifique que as soluções da equação $f(x,y,z,w) = 1$ são, na vizinhança de $(2,0,1,0)$, o gráfico de uma função $w = g(x,y,z)$ de classe C^1.

Resolução. A função f é de classe C^1, $f(2,0,1,0) = 1$, e

$$Df(x,y,z,w) = [\ 2xy \quad x^2 - w\sin(yw) \quad (z-w)^{-1} \quad -y\sin(yw) - (z-w)^{-1}\ ].$$

Como $\frac{\partial f}{\partial w}(2,0,1,0) = -1 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante que as soluções da equação $f(x,y,z,w) = 1$ são, na vizinhança de $(2,0,1,0)$, da forma $(x,y,z,g(x,y,z))$, onde $g(x,y,z)$ é uma função de classe C^1 definida numa vizinhança de $(2,0,1)$.

[2.0] b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(2,0,1)$.

Resolução. Como $f(x,y,z,g(x,y,z)) = 1$, o Teorema de derivação da função composta implica que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,g(x,y,z)) + \frac{\partial f}{\partial w}(x,y,z,g(x,y,z))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 0.$$

Temos

$$Df(2,0,1,0) = [\ 0 \quad 4 \quad 1 \quad -1\ ],$$

e portanto

$$\frac{\partial g}{\partial y}(2,0,1) = 4.$$

3. Considere as funções $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1, x+y+z-1)$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y$. Seja $\mathbb{M} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$.

[1.5] a) Quais os pontos de $\mathbb{M}$ em que DF tem característica máxima? Justifique.

Resolução. A matriz jacobiana DF tem duas linhas, dadas respectivamente por $(2x, 2y, 2z)$ e $(1, 1, 1)$. A característica será máxima (igual a 2) sempre que estes dois vectores sejam linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$. Mas $(2x, 2y, 2z)$ é linearmente dependente de $(1, 1, 1)$ se e só se $x = y = z$, e nenhum ponto da forma (x, x, x) pertence a $\mathbb{M}$ (uma vez que o sistema $3x^2 = 1$ e $3x = 1$ não tem soluções). Logo DF tem característica máxima em todos os pontos de $\mathbb{M}$.

[4.5] b) Determine o máximo de f em $\mathbb{M}$ recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução. Sejam $F_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $F_2(x, y, z) := x + y + z - 1$. Temos que resolver o sistema $\nabla f = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2$ e $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$. Da primeira equação segue que $0 = 2\lambda_1 x + \lambda_2$ e $1 = 2\lambda_1 y + \lambda_2$ e $0 = 2\lambda_1 z + \lambda_2$. Em particular, $2\lambda_1 x = 2\lambda_1 z$ e portanto $\lambda_1 = 0$ ou $x = z$. Mas $\lambda_1 = 0$ implica $1 = \lambda_2 = 0$, o que é absurdo, pelo que $x = z$. De $F_1 = F_2 = 0$ segue então que $2x^2 + y^2 = 1$ e $2x + y = 1$. Substitutindo a segunda equação na primeira, temos que $2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1$, que tem duas soluções: $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. No primeiro caso temos $x = z = 0$ e $y = 1$ e no segundo caso $x = z = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{1}{3}$. Mas $f(0, 1, 0) = 1$ e $f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, pelo que o máximo de f em $\mathbb{M}$ é igual a 1.

[3.0] 4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $(0, 0, 0)$ é um ponto crítico de f com $f(0, 0, 0) = 0$. Supondo que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2},$$

mostre que a matriz hessiana de f em $(0, 0, 0)$ é a matriz identidade.

Resolução. Como $f \in C^2$, pela fórmula de Taylor,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\langle Hf(0, 0, 0)(x, y, z), (x, y, z)\rangle + o(\|(x, y, z)\|^2)$$

pelo que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\langle Hf(0, 0, 0)(x, y, z), (x, y, z)\rangle}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2f(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} = 1,$$

Se v é um vector próprio de $Hf(0, 0, 0)$ associado ao valor próprio λ,

$$1 = \lim_{(x,y,z)=tv, t\to 0} \frac{\langle Hf(0, 0, 0)(x, y, z), (x, y, z)\rangle}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^2 \|v\|^2}{t^2 \|v\|^2} = \lambda.$$

Assim sendo, os valores próprios de $Hf(0, 0, 0)$ são todos iguais a 1 e concluímos que $Hf(0, 0, 0)$ é a matriz identidade.