Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP2-v2 – 10 de Maio de 2024 – 19h
Duração: 45 minutos

Apresente e justifique todas as respostas

[6.0] 1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = e^{x^2} + yz^2 - yz.$$

Resolução. Tendo em conta que

$$\nabla f(x, y, z) = \Big(2xe^{x^2}, z^2 - z, y(2z - 1)\Big),$$

os pontos críticos são $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$. A hessiana de f é

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} (2 + 4x^2)e^{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z - 1 \\ 0 & 2z - 1 & 2y \end{bmatrix}$$

que, em qualquer um dos pontos críticos, tem dois valores próprios positivos e um negativo. Logo ambos os pontos críticos são pontos de sela.

2. Considere a função $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$G(x, y, z) = (y^2 - xz, (z - x)(y + z)).$$

[3.0] a) Mostre que a equação

$$G(x, y, z) = (0, 0)$$

define, numa vizinhança de $(1, 1, 1)$, y e z como funções de classe C^1 de x.

Resolução. G é uma função de classe C^1 com matriz jacobiana

$$DG(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z & 2y & -x \\ -y - z & z - x & -x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Temos portanto

$$DG(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

como a submatriz das derivadas parciais em ordem a y e a z é invertível, o Teorema da Função Implícita garante que numa vizinhança desse ponto as soluções da equação são da forma $(x, y(x), z(x))$, com $y(x)$ e $z(x)$ funções de classe C^1 definidas num intervalo contendo o ponto $x = 1$.

[2.0] b) Calcule as derivadas $y'(1)$ e $z'(1)$.

Resolução. Como $G(x, y(x), z(x)) = (0, 0)$, o Teorema da derivação da função composta implica que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y(x), z(x))y'(x) + \frac{\partial G_1}{\partial z}(x, y(x), z(x))z'(x) = 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y(x), z(x))y'(x) + \frac{\partial G_2}{\partial z}(x, y(x), z(x))z'(x) = 0 \end{cases};$$

em particular, no ponto $(1, 1, 1)$,

$$\begin{cases} 2y'(1) - z'(1) = 1 \\ 2z'(1) = 2 \end{cases},$$

o que implica

$$y'(1) = z'(1) = 1.$$

3. Considere a bola $\mathbb{B} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e a função $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$.

[2.0] a) Justifique que f tem máximo absoluto em $\mathbb{B}$, e que este não é atingido no interior de $\mathbb{B}$.

Resolução. A bola $\mathbb{B}$ é compacta (uma vez que é limitada – por exemplo, pela bola aberta de raio 2 centrada na origem – e fechada – porque contém a sua fronteira $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$) e a função f é contínua (por ser um polinómio), pelo que a existência de máximo absoluto em $\mathbb{B}$ segue do Teorema de Weierstraß. A função f tem um único ponto crítico em $\mathbb{R}^2$ em $(x,y) = (1,1)$, e este ponto não pertence ao interior de $\mathbb{B}$, pelo que o máximo de f em $\mathbb{B}$ não é atingido no interior de $\mathbb{B}$.

[4.0] b) Calcule o máximo de f em $\mathbb{B}$.

Resolução. Pela alínea anterior, o máximo de f em $\mathbb{B}$ é atingido na fronteira de $\mathbb{B}$, que é o círculo dado pela equação $F(x,y) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função $F(x,y) := x^2+y^2-1$. Vamos calcular o máximo de f em $\mathbb{B}$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange, resolvendo o sistema de equações $\nabla f = \lambda \nabla F$ e $F = 0$. Da primeira equação segue que $2 - 2x = 2\lambda x$ e $2 - 2y = 2\lambda y$, pelo que $\lambda \neq -1$ e $x = y$. Da segunda equação segue então que $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Uma vez que $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}-1$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}-1$, temos que o máximo de f em $\mathbb{B}$ é igual a $2\sqrt{2} - 1$.

[3.0] 4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de f onde a matriz hessiana é invertível, isto é, $\det Hf(x_0) \neq 0$. Prove que existe uma bola aberta centrada em x_0 que não contém qualquer outro ponto crítico de f para além de x_0.

Resolução. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função vectorial definda por $F(x) := \nabla f(x)$. Temos que F é de classe C^1 (uma vez que f é de classe C^2), $F(x_0) = \nabla f(x_0) = 0$ e, uma vez que $DF = D(\nabla f) = Hf$,

$$\det DF(x_0) = \det Hf(x_0) \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, segue que F é invertível numa bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ centrada em x_0. Em particular, F não possui mais nenhum zero em B para além de x_0; ou seja, o único ponto crítico de f em B é x_0.