Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP2-v1 – 10 de Maio de 2024 – 19h
Duração: 45 minutos

Apresente e justifique todas as respostas

[6.0] 1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = e^{x^2} + y^2 z + yz.$$

Resolução. Tendo em conta que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(2xe^{x^2}, (2y + 1)z, y^2 + y\right),$$

os pontos críticos são $(0, 0, 0)$ e $(0, -1, 0)$. A hessiana de f é

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} (2 + 4x^2)e^{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 2y + 1 \\ 0 & 2y + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que, em qualquer um dos pontos críticos, tem dois valores próprios positivos e um negativo. Logo ambos os pontos críticos são pontos de sela.

2. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (xz - y^2, (x - 2y)(x - z)).$$

[3.0] a) Mostre que a equação

$$F(x, y, z) = (0, 0)$$

define, numa vizinhança de $(1, -1, 1)$, x e y como funções de classe C^1 de z.

Resolução. F é uma função de classe C^1 com matriz jacobiana

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & -2y & x \\ 2x - 2y - z & -2(x - z) & -(x - 2y) \end{pmatrix}.$$

Temos portanto

$$DF(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

como a submatriz das derivadas parciais em ordem a x e a y é invertível, o Teorema da Função Implícita garante que numa vizinhança desse ponto as soluções da equação são da forma $(x(z), y(z), z)$, com $x(z)$ e $y(z)$ funções de classe C^1 definidas num intervalo contendo o ponto $z = 1$.

[2.0] b) Calcule as derivadas $x'(1)$ e $y'(1)$.

Resolução. Como $F(x(z), y(z), z) = (0, 0)$, o Teorema da derivação da função composta implica que

$$DF(x(z), y(z), z) \begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e em particular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[2.0]

3. Considere a bola $\mathbb{B} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ e a função $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 4x + 4y - x^2 - y^2$.

   a) Justifique que f tem máximo absoluto em $\mathbb{B}$, e que este não é atingido no interior de $\mathbb{B}$.

   Resolução. A bola $\mathbb{B}$ é compacta (uma vez que é limitada – por exemplo, pela bola aberta de raio 2 centrada na origem – e fechada – porque contém a sua fronteira $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$) e a função f é contínua (por ser um polinómio), pelo que a existência de máximo absoluto em $\mathbb{B}$ segue do Teorema de Weierstraß. A função f tem um único ponto crítico em $\mathbb{R}^2$ em $(x,y) = (2,2)$, e este ponto não pertence ao interior de $\mathbb{B}$, pelo que o máximo de f em $\mathbb{B}$ não é atingido no interior de $\mathbb{B}$.

[4.0]

   b) Calcule o máximo de f em $\mathbb{B}$.

   Resolução. Pela alínea anterior, o máximo de f em $\mathbb{B}$ é atingido na fronteira de $\mathbb{B}$, que é o círculo dado pela equação $F(x,y) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função $F(x,y) := x^2+y^2-2$. Vamos calcular o máximo de f em $\mathbb{B}$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange, resolvendo o sistema de equações $\nabla f = \lambda \nabla F$ e $F = 0$. Da primeira equação segue que $4 - 2x = 2\lambda x$ e $4 - 2y = 2\lambda y$, pelo que $\lambda \neq -1$ e $x = y$. Da segunda equação segue então que $x = y = \pm 1$. Uma vez que $f(1,1) = 6$ e $f(-1,-1) = -10$, temos que o máximo de f em $\mathbb{B}$ é igual a 6.

[3.0]

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de f onde a matriz hessiana é invertível, isto é, $\det Hf(x_0) \neq 0$. Prove que existe uma bola aberta centrada em x_0 que não contém qualquer outro ponto crítico de f para além de x_0.

Resolução. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função vectorial definda por $F(x) := \nabla f(x)$. Temos que F é de classe C^1 (uma vez que f é de classe C^2), $F(x_0) = \nabla f(x_0) = 0$ e, uma vez que $DF = D(\nabla f) = Hf$,

$$\det DF(x_0) = \det Hf(x_0) \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, segue que F é invertível numa bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ centrada em x_0. Em particular, F não possui mais nenhum zero em B para além de x_0; ou seja, o único ponto crítico de f em B é x_0.